Calcul matriciel

Table des matières

I Matrices

Définition 1
Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
*Une **matrice** $n \times p$ est un tableau à n lignes et p colonnes, que l'on note*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq p}$$

Le premier indice i désigne la ligne, le deuxième j la colonne.

Exemple
- La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 0 \\ \frac{1}{2} & \sqrt{5} & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×3 à deux lignes et trois colonnes.
- a_{23} est le coefficient situé à l'intersection de la $2^{ième}$ ligne et de la $3^{ième}$ colonne, il vaut 5.

Définition 2
Soit A une matrice $n \times p$.

- *Si $p = 1$, A est une **matrice colonne** :* $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$
- *Si $n = 1$, A est une **matrice ligne** :* $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$
- *Si $n = p$, A est une **matrice carrée**. Les coefficients a_{ii} sont appelés coefficients diagonaux :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- *La matrice $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls s'appelle la **matrice nulle**.*

Exemple
- La matrice $M = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.
- La matrice $N = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.
- La matrice $P = \begin{pmatrix} 2 & 21 & -3 \\ 1 & -1 & 6 \\ -4 & 0 & \pi \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'orde 3.
- La matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice nulle.

Matrices carrées particulières :

Soit $A=(a_{ij})$ une matrice carrée de taille n.

- Si $a_{ij}=0$ dès que $i>j$, A est appelée matrice **triangulaire supérieure** :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Si $a_{ij}=0$ dès que $i<j$, A est appelée matrice **triangulaire inférieure** :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

- Si $a_{ij}=0$ dès que $i\neq j$, A est appelée **matrice diagonale** :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Si de plus les termes diagonaux sont tous égaux à 1, elle est appelée **matrice unité** :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple

- Matrice triangulaire supérieure : $T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
- Matrice triangulaire inférieure : $V=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$
- Matrice diagonale : $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

Propriété 1
Les matrices $A=(a_{ij})$ et $B=(b_{ij})$ de dimension $n\times p$ sont **égales** ssi $a_{ij}=b_{ij}$ pour tous i,j.

II Opérations sur les matrices

Propriété 2 (Multiplication d'une matrice par un scalaire)
Si $A = (a_{ij})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit λA comme étant la matrice $C = (c_{ij})$ telle que $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ pour tous i, j.

Exemple
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$, alors $-2A = \begin{pmatrix} -2 \times \frac{1}{2} & -2 \times 1 \\ -2 \times 0 & -2 \times -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Propriété 3 (Somme de deux matrices de même taille)
Si $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont deux matrices $n \times p$, on définit la somme $A + B$ comme étant la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $n \times p$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tous i, j.

Exemple
Somme de dexu matrices 2×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0-1 & -1-2 \\ 2-3 & 1-1 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Propriété 4 (Produit de deux matrices)
Soit $A = (a_{ij})$ de taille $n \times p$ et $B = (b_{jk})$ de taille $p \times q$, on définit le produit $A \times B$ (aussi noté AB) comme étant la matrice $C = (c_{ik})$ définie par $c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{jk}$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq k \leq q$.

Remarque 1
Le produit n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Présentation du calcul :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cdot & \boxed{c_{12}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

on a donc $c_{12} = 1 \times 1 + 2 \times 2 - 1 \times 3 = 2$.

On obtient donc : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$