1 Définition de suites

1. $u_1 = \dfrac{7\times 1-2}{1+4} = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = \dfrac{19}{7}$ et $u_6 = 4$.
2. $u_1 = 2u_0+3 = 7,\ u_2 = 2u_1+3 = 17,\ u_3 = 37$, c'est une suite définie par récurrence, donc pour calculer u_6, je dois connaître u_4 et u_5.
   $u_4 = 2u_3+3 = 77,\ u_5 = 2u_4+3 = 157$ et enfin $u_6 = 2u_5+3 = 317$.
3. $u_1 = 2$ (1 n'est pas un nombre premier), $u_2 = 3,\ u_3 = 5$ et $u_6 = 13$.
4. $u_1 = 2,\ u_2 = 2+4 = 6,\ u_3 = 2+4+6 = 12$ et $u_6 = 2+4+6+8+10+12 = 42$.
5. $u_1 = 1\ u_2 = 2, u_3 = 2$ et $u_6 = 4$.
6. Pour augmenter un nombre de $t\%$, je le multiplie par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$.
   $u_1 = 1\ 000 \times 1,025 = 1\ 025,\ u_2 = u_1 \times 1,025 = 1\ 000 \times (1,025)^2 \approx 1\ 050{,}63$
   $u_3 = 1\ 000 \times (1,025)^3 \approx 1\ 076{,}89$ et $u_6 = 1\ 000 \times (1,025)^6 \approx 1\ 159{,}69$.
7. $u_1 = 1,\ u_2 = 4,\ u_3 = 1$ et $u_6 = 2$. car $\pi \simeq 3{,}141592$

Retour

2 Sens de variation d'une suite

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = 3(n+1)-5 = 3n-2$, donc :
   $u_{n+1}-u_n = (3n-2)-(3n-5) = 3 > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = -(n+1)^2+5(n+1)-2-(-n^2+5n-2) = -2n+4$.
   Or $-2n+4$ est positif ssi $n \leqslant 2$ et négatif ssi $n \geqslant 2$, donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2.
3. Exemple d'utilisation des trois méthodes sur la même suite.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2-(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$, or $n+2>0$ et $n+3>0$ donc $u_{n+1}-u_n>0$ et la suite (u_n) est croissante.
   - Tous les termes de la suite sont strictement positifs.
     Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+2}{n+3}\times\dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3}$, or $n^2+4n+4 > n^2+4n+3$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et la suite (u_n) est croissante.
   - On a : $u_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$.
     f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = \dfrac{1(x+2)-1(x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la suite (u_n) est croissante.
4. Tous les termes de la suite sont strictement positifs.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+1}}{2} \times \dfrac{2}{3^n} = 3 > 1$, donc la suite (u_n) est croissante.

Il faut savoir que :
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

5. On a : $u_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x+3}} > 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et (u_n) est croissante

* 6. • Je ne peux pas appliquer la méthode du quotient car tous les termes de la suite ne sont pas strictement positifs.
   • Je ne peux pas appliquer la méthode utilisant une fonction car je ne sais pas étudier les variations de $x \mapsto \left(-\dfrac{1}{2}\right)^x$.
   • Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $u_{n+1} - u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \times \left(-\dfrac{1}{2} - 1\right) = -\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   Or l'expression $-\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ est positive lorsque n est impair et elle est négative lorsque n est pair, donc la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3$ et la suite (u_n) est croissante.
8. Tous les termes de la suite sont strictement positifs. (pour le prouver rigoureusement, il faudrait une méthode de démonstration qui est au programme de terminale, mais nous l'admettons ici)
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2} < 1$, donc la suite (u_n) est décroissante.
9. Je pose $u_n = f(n)$, avec f définie sur $[0; +\infty[$, par : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.
   f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$* $- \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$.
   Or $x + 1 \geqslant x > 0$ donc $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{x} > 0$ et $f'(x) \leqslant 0$. La fonction f est donc décroissante sur $]0; +\infty[$ et (u_n) est décroissante.

Retour

* Remarque : $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

On peut simplement dire que si n est pair, $u_n > 0$
et si n est impair, $u_n < 0$
Donc la suite change alternativement de signe, elle n'est donc ni croissante, ni décroissante.

* Il y a une erreur de calcul !
$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc $(\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ donc $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
→ la suite est juste.