Devoir n°1

Exercice 1

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' - 2y = \mathrm{e}^{2x}$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) :

   $$y' - 2y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$h(x) = x\mathrm{e}^{2x}$$

   Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition

   $$f(0) = -1$$

Corrigé

1°) Les solutions de l'équation différentielle : $y' - 2y = 0$ sont les fonctions qui s'écrivent sous la forme :

$$\boxed{y_0(x) = ke^{2x}} \quad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$ (1pt)

2°) Montrons que : $h(x) = xe^{2x}$ est une solution de (E).

$$h(x) = xe^{2x} = u.v \quad \text{avec } u = x \text{ et } v = e^{2x}$$

donc $h'(x) = u'v + uv' = 1 \times e^{2x} + x \times 2e^{2x} = e^{2x} + 2xe^{2x}$

Ainsi : $h'(x) - 2h(x) = e^{2x} + 2xe^{2x} - 2xe^{2x} = e^{2x}$ (2pts)

La fonction $h(x)$ est donc une solution particulière de (E).

3°) D'après 1°) et 2°) on peut dire que l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions :

$$y(x) = ke^{2x} + h(x)$$

$$\boxed{y(x) = ke^{2x} + xe^{2x}} \quad k \in \mathbb{R}$$ (1pt)

4°) Comme f est une solution de (E) alors $f(x) = ke^{2x} + xe^{2x}$

De plus $f(0) = -1$ donc $ke^{0} + 0 = -1$

c.à.d : $k = -1$

Conclusion : $f(x) = -e^{2x} + xe^{2x}$

$$\boxed{f(x) = (x-1)e^{2x}}$$ (2pts)