Equations différentielles du second ordre

Exercice 1:

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y' + 4y = 8$, où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2$ est une solution de (E).

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = 0$.

3. En déduire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie les conditions $f(0) = 2$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2} + 2$

Correction du devoir : (E) : $y'' + 4y' + 4y = 8$

1°) Vérifions que $g(x) = 2$ est une solution de (E)

$g(x) = 2$

donc $g'(x) = 0$ et $g''(x) = 0$

Ainsi $g''(x) + 4g'(x) + 4g(x) = 0 + 0 + 4 \times 2 = 8$

Donc g est solution de (E). 1

2°) Résolution de : $y'' + 4y' + 4y = 0$

C'est une équation différentielle du second ordre sans second membre. Son équation caractéristique est : $r^2 + 4r + 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \times 1 \times 4 = 0$$

Il y a une seule racine réelle : $r = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$

D'après le formulaire, les solutions s'écrivent :

$$\boxed{y_0(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x}} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}$$ 2

3°) D'après le cours, les solutions s'écrivent :

$$y(x) = y_0(x) + g(x)$$

$$\boxed{y(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x} + 2}$$ 1

4°) f est une solution de (E) donc $f(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x} + 2$

Comme $f(0) = 2$ donc $(0.x + \mu)e^{0} + 2 = 2$ donc $\boxed{\mu = 0}$

Donc $f(x) = \lambda x e^{-2x} + 2$

Comme $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2} + 2$ donc $\lambda \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{1} + \cancel{2} = -\frac{e}{2} + \cancel{2}$

donc $-\frac{\lambda}{2}e = -\frac{e}{2}$ donc $\boxed{\lambda = 1}$

Conclusion : $\boxed{f(x) = xe^{-2x} + 2}$ 2