Sujet 2007 **Exercice 1 (12 *points*)**

On s'intéresse à un système entrée-sortie susceptible d'être contrôlé.
Dans la partie A, on étudie le système en l'absence de contrôle.
Dans la partie B, on étudie le système soumis à un contrôle.
Les parties A, B et C sont indépendantes dans leurs résolutions respectives.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E_1) suivante :

$$\frac{1}{2}y'(t)+y(t)=10-\beta \qquad (E_1)$$

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle t et β une constante réelle.

1. Montrer que la fonction h définie pour tout nombre réel t par $h(t)=10-\beta$ est solution de l'équation différentielle (E_1).

2. Résoudre l'équation différentielle (E_1).

3. Montrer que la fonction f, solution de l'équation différentielle (E_1) et qui vérifie $f(0)=10$ est définie sur **R** par : $f(t)=\beta e^{-2t}+10-\beta$.

4. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ que l'on note f_∞.

Sujet 2005 **EXERCICE 2 (*11 points*)**

L'exercice est composé de deux parties qui peuvent se traiter de façon indépendante.

Partie A

Un embrayage vient appliquer, à l'instant $t=0$, un couple résistant constant sur un moteur dont la vitesse à vide est de 150 rad/s.
On note $\omega(t)$ la vitesse de rotation du moteur à l'instant t.

La fonction ω est solution de l'équation différentielle : $\frac{1}{200}y'(t)+y(t)=146$ **(1),**

où y désigne une fonction dérivable de la variable réelle positive t.

1. a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle **(1)**.
On cherchera une solution particulière constante.

b) Sachant que $\omega(0)=150$, montrer que $\omega(t)=146+4e^{-200t}$ pour tout $t\in[0,+\infty[$.

2. a) On note $\omega_\infty=\lim\limits_{t\to+\infty}\omega(t)$. Déterminer la perte de vitesse $\omega(0)-\omega_\infty$ due au couple résistant.

b) On considère que la vitesse du moteur est stabilisée lorsque l'écart relatif $\left|\frac{\omega(t)-\omega_\infty}{\omega_\infty}\right|$ est inférieur à 1% .
Calculer le temps mis par le moteur pour stabiliser sa vitesse.
On donnera la valeur exacte et la valeur arrondie au millième.

Sujet 2007 $\boxed{\text{Partie A}}$: $\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = 10 - \beta$ (E_1)

1°) $h(t) = 10 - \beta$ (β est une constante)
donc $h'(t) = 0$
ainsi $\frac{1}{2}h'(t) + h(t) = 0 + h(t) = 10 - \beta$

2 Donc $h(t) = 10 - \beta$ est une solution de (E_1)

2°). Résolution de l'équation sans second membre :

$$\frac{1}{2}y'(t) + y(t) = 0 \qquad (E_0)$$

On sait que les solutions sont les fonctions :

$$y_0(t) = k e^{-\frac{b}{a}t} \quad \text{avec } b = 1,\ a = \frac{1}{2}$$

2 $$\boxed{y_0(t) = k e^{-2t}} \quad k \in \mathbb{R}$$

.. on sait que $h(t) = 10 - \beta$ est une solution particulière
... conclusion : Les solutions de (E_1) sont les fonctions

$$y(t) = y_0(t) + h(t)$$

2 $$\boxed{y(t) = k e^{-2t} + 10 - \beta} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

3°) Si f est une solution alors $f(t) = k e^{-2t} + 10 - \beta$
De plus, $f(0) = 10$ donc $k + 10 - \beta = 10$ donc $k = \beta$

2 Donc $\boxed{f(t) = \beta e^{-2t} + 10 - \beta}$

4°) $\lim_{t \to +\infty} \left(e^{-2t}\right) = 0$ donc $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0 + 10 - \beta$

2 ainsi $\boxed{f_{\infty} = 10 - \beta}$

Sujet 2005 Exercice 2, Partie A

1a) • Résolution de l'équation sans second membre :

$$\frac{1}{200} y'(t) + y(t) = 0 \qquad (0)$$

Les solutions s'écrivent $y_0(t) = k e^{-\frac{b}{a}t}$ avec $b = 1$, $a = \frac{1}{200}$

2 Donc $\boxed{y_0(t) = k e^{-200t}}$ $k \in \mathbb{R}$

•• Je remarque que la constante 146 est solution

1 particulière de (1)

••• conclusion : Les solutions de (1) sont les fonctions

1 $\boxed{y(t) = k e^{-200t} + 146}$ $k \in \mathbb{R}$

1b) $w(t) = k e^{-200t} + 146$ car $w(t)$ est une solution de (1)

Comme $w(0) = 150$ donc $k + 146 = 150$ donc $k = 4$

Donc :

2 $\boxed{w(t) = 4 e^{-200t} + 146 = 146 + 4 e^{-200t}}$

1 2a) Comme $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-200t} = 0$ donc $\boxed{w_\infty = 146}$

1 La perte de vitesse est donc : $w(0) - w_\infty = 150 - 146 = 4$ rad/s

b) $\frac{w(t) - w_\infty}{w_\infty} = \frac{4 e^{-200t}}{146}$

Donc $\left| \frac{w(t) - w_\infty}{w_\infty} \right| \leq 0{,}01$

$\Leftrightarrow \frac{4 e^{-200t}}{146} \leq 0{,}01$

$\Leftrightarrow e^{-200t} \leq \frac{146 \times 0{,}01}{4}$

2 $\Leftrightarrow -200t \leq \ln(0{,}365)$

$\Leftrightarrow t \geq -\frac{1}{200} \ln(0{,}365)$

La vitesse se stabilise à partir de $\boxed{t_0 = -\frac{1}{200} \ln(0{,}365)}$

$\boxed{t_0 \simeq 0{,}005 \text{ s}}$