

Exercice 1. (11 points)

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U , est définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $] -\infty; 0[$.

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e(t) = 4[U(t) - U(t - 2)].$$

a) Tracer la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthormal.

b) On note E la transformée de Laplace de la fonction e .

Déterminer $E(p)$.

2. On considère la fonction s telle que :

$$4s'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s(0) = 0.$$

On admet que la fonction s possède une transformée de Laplace, notée S .

Démontrer que :

$$S(p) = \frac{1}{p \left(p + \frac{1}{4} \right)} (1 - e^{-2p}).$$

3. Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$\frac{1}{p \left(p + \frac{1}{4} \right)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p + \frac{1}{4}}.$$

4. Compléter le tableau ci-dessous dans lequel f désigne la fonction causale associée à F :

$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}e^{-2p}$	$\frac{1}{p + \frac{1}{4}}$	$\frac{1}{p + \frac{1}{4}}e^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$			

5. a) Déterminer $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque.

b) Vérifier que :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = 4 - 4e^{-\frac{t}{4}} & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ s(t) = 4e^{-\frac{t}{4}} \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right) & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$

6. a) Justifier que la fonction s est croissante sur l'intervalle $[0; 2]$

b) Déterminer $\lim_{\substack{t \rightarrow 2 \\ t < 2}} s(t)$.

7. a) Déterminer le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[2; +\infty[$.

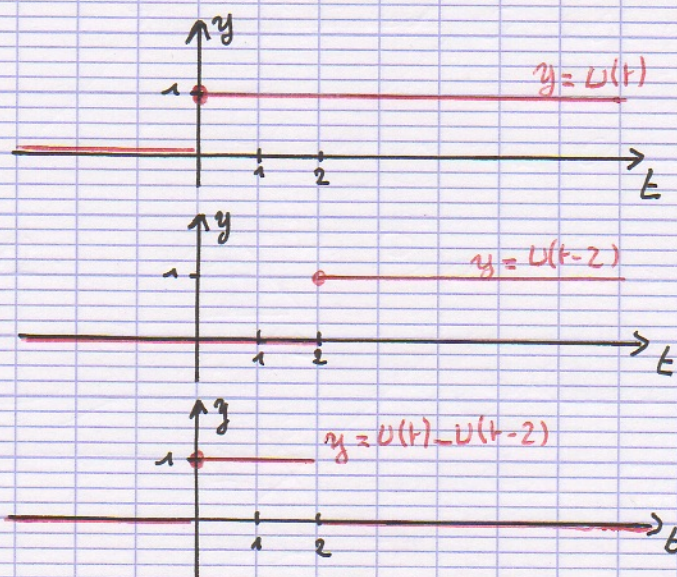
b) Déterminer $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t)$.

8. Tracer la courbe représentative de la fonction s dans un repère orthonormal.

Devoir maison: Fiche n° 5 : correction

1°) a) $e(t) = 4[U(t) - U(t-2)]$

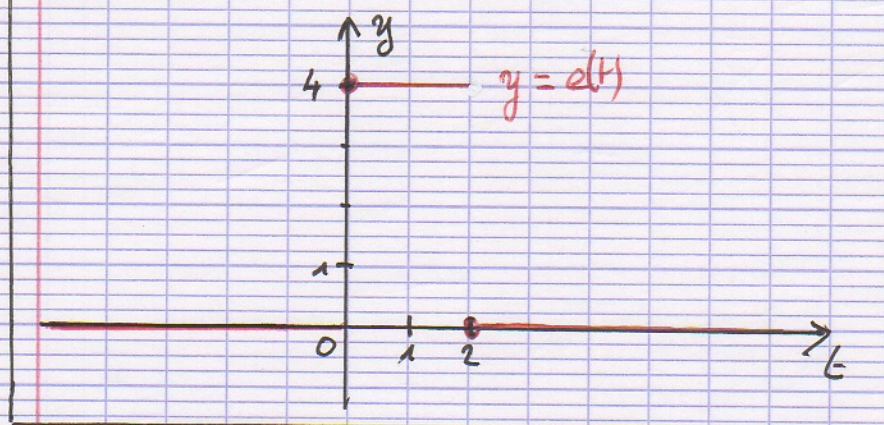
Tracés successivement $U(t)$, puis $U(t-2)$, puis $U(t) - U(t-2)$



Remarque: pour la différence $U(t) - U(t-2)$ on regarde dans les différents intervalles $]-\infty; 0[$, $[0; 2[$ et $[2; +\infty[$ et on fait la différence.

on en déduit la représentation graphique de $e(t) = 4(U(t) - U(t-2))$

(2pts)



Autre méthode: (On fait moins de graphique)

• si $t < 0$: $U(t) = 0$ et $U(t-2) = 0$ donc $e(t) = 4(0-0) = 0$

$$e(t) = 0$$

• si $0 \leq t < 2$: $U(t) = 1$ et $U(t-2) = 0$ donc $e(t) = 4 \times (1-0) = 4$

$$e(t) = 4$$

• si $t \geq 2$: $U(t) = 1$ et $U(t-2) = 1$ donc $e(t) = 4 \times (1-1) = 4 \times 0 = 0$

$$e(t) = 0$$

On trace ensuite la courbe (voir avant)

1°) b) $e(t) = 4(u(t) - u(t-2))$

Donc:

$$\begin{aligned} E(p) = \mathcal{L}(e(t)) &= 4(\mathcal{L}(u(t)) - \mathcal{L}(u(t-2))) \\ &= 4\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-2p}\right) \end{aligned}$$

(2 pts)

$$\boxed{E(p) = 4\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-2p}\right)}$$

2°) On note $S(p) = \mathcal{L}(s(t))$

Nous avons:

$$4s'(t) + s(t) = e(t)$$

Donc en prenant la transformée de Laplace de chaque membre:

$$4\mathcal{L}(s'(t)) + \mathcal{L}(s(t)) = \mathcal{L}(e(t))$$

$$4(pS(p) - s(0)) + S(p) = 4\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-2p}\right)$$

$$4pS(p) + S(p) = 4 \times \frac{1}{p} \times (1 - e^{-2p})$$

$$(4p+1)S(p) = \frac{4}{p}(1 - e^{-2p})$$

$$S(p) = \frac{4}{p(4p+1)}(1 - e^{-2p})$$

(2 pts)

$$\boxed{S(p) = \frac{1}{p(p+\frac{1}{4})}(1 - e^{-2p})}$$

on a divisé
par 4 le
numérateur et
le dénominateur
dans $\frac{4}{p(4p+1)}$

$$3^o) \frac{1}{p(p+\frac{1}{4})} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p+\frac{1}{4}}$$

on réduit
au même
dénominateur

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p(p+\frac{1}{4})} = \frac{a(p+\frac{1}{4})}{p(p+\frac{1}{4})} + \frac{bp}{p(p+\frac{1}{4})}$$

on additionne
les deux
fractions.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p(p+\frac{1}{4})} = \frac{ap + \frac{1}{4}a + bp}{p(p+\frac{1}{4})}$$

Les numérateurs
doivent être égaux

$$\Leftrightarrow 1 = (a+b)p + \frac{1}{4}a$$

$$\Leftrightarrow 0p + 1 = (a+b)p + \frac{1}{4}a$$

on le voit comme
une égalité de polynômes

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ \frac{1}{4}a=1 \end{cases}$$

on identifie les
coefficients

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-4 \\ a=4 \end{cases}$$

on résout le système
(on trouve d'abord $a=4$)

conclusion:

$$\frac{1}{p(p+\frac{1}{4})} = \frac{4}{p} - \frac{4}{p+\frac{1}{4}}$$

4°) En utilisant le formulaire je complète

$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p} e^{-2p}$	$\frac{1}{p+\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{p+\frac{1}{4}} e^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$	$U(t-2)$	$e^{-\frac{1}{4}t} U(t)$	$e^{-\frac{1}{4}(t-2)} U(t-2)$

(3pts)

(3pts)

5°a) On a: $S(p) = \frac{1}{p(p+\frac{1}{4})} (1 - e^{-2p})$ (voir 2°)

En utilisant 3°) on écrit:

$$S(p) = \left(\frac{4}{p} - \frac{4}{p+\frac{1}{4}} \right) (1 - e^{-2p})$$

En développant ce résultat on obtient:

$$S(p) = \frac{4}{p} - \frac{4}{p+\frac{1}{4}} - \frac{4}{p} e^{-2p} + \frac{4}{p+\frac{1}{4}} e^{-2p}$$

Donc $s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{p}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{p+\frac{1}{4}}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{p} e^{-2p}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{4}{p+\frac{1}{4}} e^{-2p}\right)$

En utilisant le tableau de la question 4°)

$$s(t) = 4U(t) - 4e^{-\frac{1}{4}t} U(t) - 4U(t-2) + 4e^{-\frac{1}{4}(t-2)} U(t-2)$$

(2pts)

$$s(t) = (4 - 4e^{-\frac{1}{4}t}) U(t) + (-4 + 4e^{-\frac{1}{4}t + \frac{1}{2}}) U(t-2)$$

5°b) On distingue les différents intervalles:

si $t < 0$: $U(t) = 0$ et $U(t-2) = 0$
donc $s(t) = 0$

si $0 \leq t < 2$: $U(t) = 1$ et $U(t-2) = 0$
donc $s(t) = 4 - 4e^{-\frac{1}{4}t}$

(2pts)

si $t > 2$: $U(t) = 1$ et $U(t-2) = 1$
donc $s(t) = 4 - 4e^{-\frac{1}{4}t} - 4 + 4e^{-\frac{1}{4}(t-2)}$
 $s(t) = -4e^{-\frac{1}{4}t} + 4e^{-\frac{1}{4}t} e^{\frac{1}{2}}$
 $s(t) = 4e^{-\frac{1}{4}t} (e^{\frac{1}{2}} - 1)$

6°a) Pour $t \in [0; 2]$ $s(t) = 4 - 4e^{-\frac{1}{2}t}$

Calculons $s'(t)$: $s'(t) = 0 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times e^{-\frac{1}{2}t}$

$$s'(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}$$

(1pt)

Comme $e^{-\frac{1}{2}t} > 0$, donc $s'(t) > 0$ pour $t \in [0; 2]$

Donc $s(t)$ est croissante sur $[0; 2]$

6°b)

(1pt)

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 2 \\ t < 2}} s(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow 2 \\ t < 2}} \left(4 - 4e^{-\frac{t}{2}}\right) = 4 - 4e^{-\frac{2}{2}} = 4 - 4e^{-1} \approx 1,57$$

7°a) Si $t \in [2; +\infty[$ $s(t) = 4e^{-\frac{t}{2}}(e^{\frac{1}{2}} - 1)$

Donc $s'(t) = 4(e^{\frac{1}{2}} - 1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-\frac{t}{2}}$

$$s'(t) = \underbrace{-\frac{1}{2}(e^{\frac{1}{2}} - 1)}_{\text{c'est un nombre négatif}} \underbrace{e^{-\frac{t}{2}}}_{\text{toujours } > 0}$$

c'est un
nombre
négatif

toujours > 0 .

(1pt)

Donc $s'(t) < 0$ sur $[2; +\infty[$

Donc $s(t)$ est décroissante sur $[2; +\infty[$

(1pt)

7°b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \underbrace{4e^{-\frac{t}{2}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{(e^{\frac{1}{2}} - 1)}_{\text{c'est un nombre}}$

$\downarrow$
0

c'est un
nombre

8° Courbe représentative de $e(t)$

(2pts)

