Devoir n°6

Exercice 1: Tracer la représentation graphique de fonctions

Pour chaque cas, tracer la représentation graphique des fonctions données

1°) $f(t)=U(t-2)$ où $U(t)$ est la fonction échelon unité.

2°) $g(t)=t.U(t)$

3°) $h(t)=3(U(t-1)-U(t-3))$

Exercice 2 : Transformée de Laplace

Déterminer les transformées de Laplace des fonctions définies par :

$f_1(t)=2e^{4t}U(t)$ $\quad$ $f_2(t)=(3t-5)U(t)$ $\quad$ $f_3(t)=(t^4-e^{-3t})U(t)$

$f_4(t)=3\cos(7t).U(t)$ $\quad$ $f_5(t)=e^{3t}\sin(t)U(t)$

Exercice 3 : Calcul d'originaux de fonctions

1°) $F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}$ $\quad$ 2°) $F(p)=\frac{1}{p}+\frac{2}{p+1}$ $\quad$ 3°) $F(p)=\frac{1}{p}e^{-p}$ $\quad$ 4°) $F(p)=\frac{1}{(p+1)^2}$

5°) $F(p)=\frac{1}{p^2+4}$ $\quad$ 6°) $F(p)=\frac{p}{(p+2)^2+4}$

Exercice 4 : Probabilités

Une entreprise fabrique et commercialise des composants électroniques assemblés dans deux ateliers numérotés 1 et 2.

L'atelier 1 fournit 80 % de la production et l'atelier 2 fournit les 20 % restants.

On a remarqué que 1,5% des composants issus de l'atelier 1 sont défectueux, et que 4% des composants issus de l'atelier 2 sont défectueux.

On prend au hasard un composant dans la production d'une journée et on considère les événements suivants :

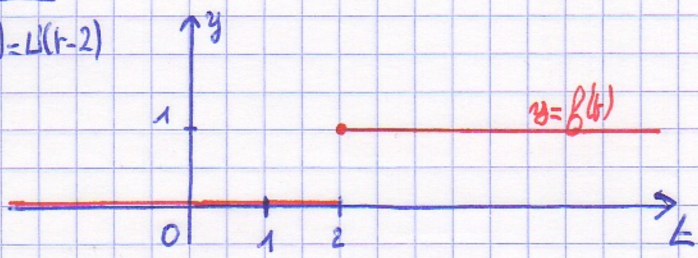
- événement A : « le composant provient de l'atelier 1 » ;
- événement B : « le composant provient de l'atelier 2 » ;
- événement D : « le composant est défectueux ».

1. Déduire de l'énoncé les probabilités P(A) et P(B), ainsi que les probabilités conditionnelles $P_A(D)$ et $P_B(D)$.
2. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré de probabilités.
3. Calculer la probabilité de l'événement D.
4. On constate qu'un composant est défectueux. Quelle est la probabilité pour qu'il provienne de l'atelier 1 ?

Corrigé du devoir

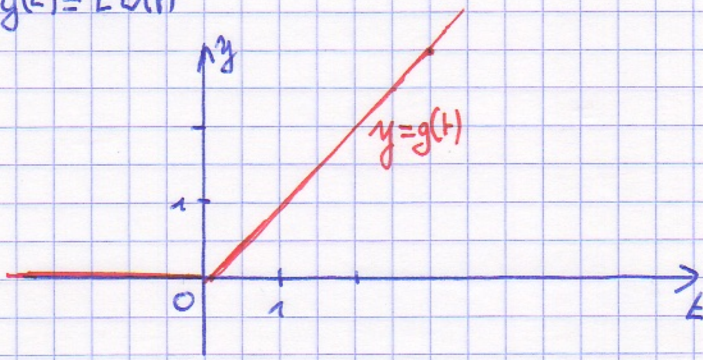
Exercice 1

1°) $f(t) = U(t-2)$



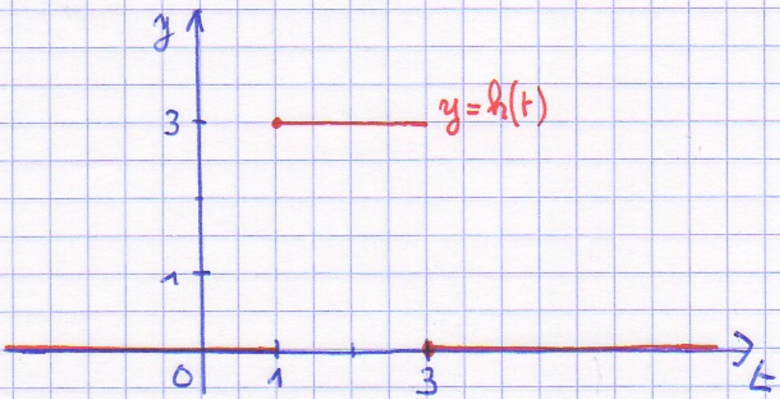
1pt

2°) $g(t) = t\,U(t)$



1pt

3°) $h(t) = 3\,(U(t-1) - U(t-3))$



1pt

Exercice 2

1°) $F_1(p) = \mathcal{L}(2e^{4t}U(t)) = 2 \times \frac{1}{p-4} = \frac{2}{p-4}$ 1pt

2°) $F_2(p) = \mathcal{L}(3tU(t) - 5U(t)) = 3 \cdot \frac{1}{p^2} - 5 \cdot \frac{1}{p} = \frac{3}{p^2} - \frac{5}{p}$ 1pt

$F_3(p) = \mathcal{L}\left(t^4 U(t) - e^{-3t} U(t)\right) = \frac{24}{p^5} - \frac{1}{p+3}$ 1pt

$F_4(p) = \mathcal{L}\left(3\cos(7t) U(t)\right) = 3 \times \frac{p}{p^2+49} = \frac{3p}{p^2+49}$ 1pt

$F_5(p) = \mathcal{L}\left(e^{3t}\sin(t) U(t)\right) = \frac{1}{(p-3)^2+1}$ 1pt

~~Exo~~

Exercice 3

1°) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right) = U(t) - tU(t) = (1-t)U(t)$ 1

2°) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} + \frac{2}{p+1}\right) = U(t) + 2 \times e^{-t} U(t) = (1 + 2e^{-t}) U(t)$ 1

3°) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p} e^{-p}\right) = U(t-1)$ 1

4°) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+1)^2}\right) = tU(t) \times e^{-t} = te^{-t} U(t)$ 1

5°) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+4}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^2+4}\right) = \frac{1}{2}\sin(2t) U(t)$ 1

6°) $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{(p+2)^2+4}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+2}{(p+2)^2+4} - \frac{2}{(p+2)^2+4}\right)$

$= e^{-2t}\cos(2t) U(t) - e^{-2t}\sin(2t) U(t)$

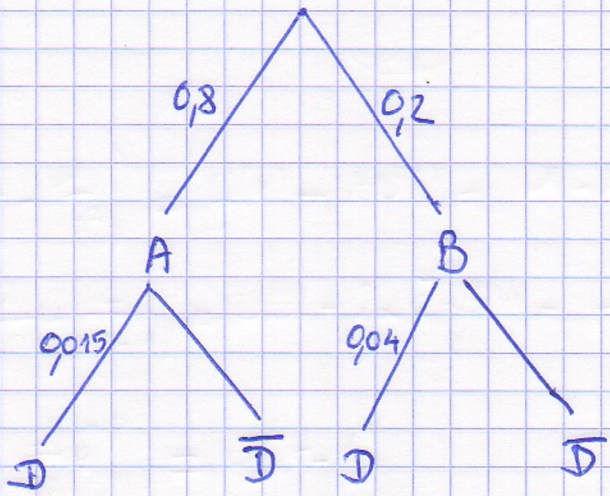
$= e^{-2t}\left(\cos(2t) - \sin(2t)\right) U(t)$ 1

Exercice 4

1°) D'après l'énoncé : $P(A) = 0{,}8$ $\quad P_A(D) = 0{,}015$

$P(B) = 0{,}2$ $\quad P_B(D) = 0{,}04$ 1

2°) Faisons un arbre pondéré de probabilité qui résume la situation



1

3°) En utilisant l'arbre précédent :

$$P(D) = 0{,}015 \times 0{,}8 + 0{,}04 \times 0{,}2 = 0{,}02$$ 2

4°) On cherche $P_D(A)$

Nous avons : $$P_D(A) = \frac{P(D \cap A)}{P(D)} = \frac{0{,}015 \times 0{,}8}{0{,}02} = \underline{\underline{0{,}6}}$$ 2