Classe: TS2ET	Date: 7/04/2017	**Type**
Devoir n°9		**Devoir surveillé**
Thème: Probabilités		

Partie A (5 points)

Une source émet un signal binaire composé de 0 et de 1. Lors du transport, le signal peut être déformé. Un 0 peut être transformé en 1 avec une probabilité 0,1 et, de même, un 1 peut être transformé en 0 avec une probabilité 0,1. Pour toute la suite, dans une série de chiffres, on lit de gauche à droite, le premier chiffre envoyé étant donc celui écrit le plus à gauche.

On envoie le signal 00. On admet que les erreurs de transmission sont des événements aléatoires indépendants les uns des autres. On considère les événements suivants :

- E1 : « les deux chiffres sont modifiés »
- E2 : « le premier chiffre est modifié mais pas le deuxième »
- E3 : « aucun chiffre n'est modifié »
- E4 : « au moins un des chiffres est modifié »

Pour chaque affirmation, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question suivi de la réponse choisie. Une bonne réponse rapporte 1 point, une réponse incorrecte ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

1. La probabilité de l'événement E1 est égale à :

   • 0,01 • 0,99 • 0,09 • 0,81

2. Si l'événement E2 est réalisé, le signal reçu est :

   • 00 • 01 • 10 • 11

3. La probabilité de l'événement E2 est égale à :

   • 0,19 • 0,81 • 0,09 • 0,90

4. La probabilité de l'événement E3 est égale à :

   • 0,01 • 0,99 • 0,09 • 0,81

5. La probabilité de l'événement E4 est égale à :

   • 0,18 • 0,20 • 0,11 • 0,91 • 0,17 • 0,19

Partie B (8 points)

1. On considère l'expérience aléatoire consistant à émettre une chaîne constituée de 10 fois le chiffre 1 et à observer la chaîne reçue. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque chaîne ainsi reçue, associe le nombre d'erreurs de transmission, c'est-à-dire le nombre de 0 obtenus.

On rappelle que la probabilité qu'un chiffre soit mal transmis est 0, 1.

On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

a) Calculer à 0,001 près la probabilité qu'il y ait exactement une erreur de transmission.

b) Montrer que la probabilité qu'il y ait au plus une erreur de transmission est égale à 0,74 à 0,01 près.

2. Estimant que la qualité des transmissions n'est pas assez bonne, les techniciens procèdent à quelques réglages afin de réduire les « bruits » à l'origine des erreurs. La probabilité qu'un chiffre soit mal transmis devrait ainsi être fortement diminuée.

Effectivement, à l'issue des réglages, on constate que la proportion de chiffres mal transmis est égale à 0,002.

a) On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de chiffres mal transmis dans une chaîne de 1 000 chiffres. On admet que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

b) Calculer à 0,001 près la probabilité qu'il y ait au moins une erreur de transmission parmi les 1 000 chiffres envoyés.

Partie C (7 points)

La transmission des chiffres binaires est assurée par un signal électrique carré. Les impulsions supérieures à 2 volts représentent le chiffre 1, les autres le chiffre 0. Ne pouvant affiner davantage leurs réglages, les techniciens admettent que les erreurs de transmission restantes sont dues à un « bruit aléatoire ». Celui-ci est modélisé par un signal de tension aléatoire U , exprimée en volts. On admet que U suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type σ.

1. Pour envoyer les chiffres 1, on envoie des impulsions de 4 volts. Ces dernières sont modifiées par le bruit aléatoire. La tension reçue est ainsi égale à $4+U$. **Dans cette question, on suppose que $\sigma=0,7$.**

   a) Montrer que la probabilité que cette tension représente le chiffre 1 est égale à la probabilité que U soit supérieure à -2.

   b) Calculer cette probabilité à 0,001 près.

2. Quelle condition doit-on imposer à l'écart type σ pour que la proportion d'erreurs de transmission d'un chiffre 1 soit inférieure à 0,1 %, c'est-à-dire pour que :

$$p(U < -2) < 0,001 \ ?$$

Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou non aboutie sera prise en compte.

corrigé du devoir

Partie A Voir l'énoncé

Partie B 1°) a) X indique le nombre d'erreurs sur 10 chiffres et la probabilité qu'un chiffre soit mal transmis est $p = 0,1$

Donc $\boxed{X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n = 10 ; p = 0,1)}$

On cherche $P(X = 1)$. A l'aide de la calculatrice :

$$\boxed{P(X = 1) = 0,387 \text{ à } 0,001 \text{ près}}$$ 2pts

b) On cherche $P(X \leq 1)$

A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$\boxed{P(X \leq 1) = 0,74 \text{ à } 0,01 \text{ près}}$$ 2pts

2°) a) Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n = 1000 ; p = 0,002)$ 1pt

b) On cherche $P(Y \geq 1)$

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y \leq 0)$$

$$= 1 - \underset{\text{(calculatrice)}}{0,135} = 0,865$$

$$\boxed{P(Y \geq 1) \simeq 0,865 \text{ à } 0,001 \text{ près}}$$ 3pts

Partie C 1°) a) D'après l'énoncé, la tension représente le chiffre 1 lorsque :

$$4 + U > 2 \iff U > 2 - 4 \iff U > -2$$

Donc la probabilité que cette tension représente le chiffre 1 est bien :

$$P(U > -2)$$ 2pts

b) Comme U suit la loi normale $\mathcal{N}(m=0 ; \sigma=0,7)$ la calculatrice permet de calculer :

$$\boxed{P(U > -2) = 0,998 \text{ à } 0,001 \text{ près}}$$ 2pts

2°) * Je trace avec la calculatrice $P(U<-2)$ en fonction de σ.
Pour cela, dans "Y=" je rentre :

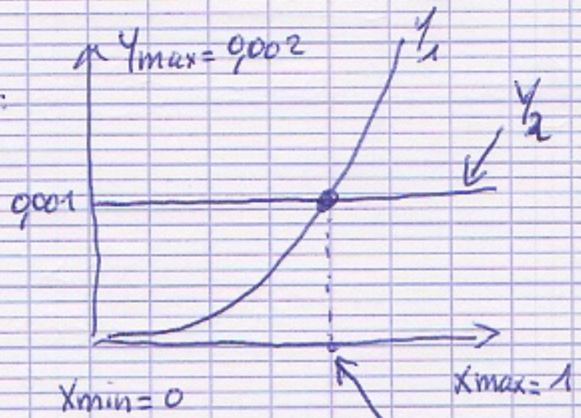
$Y_1 = \text{normalFRep}(-1E99, -2, 0, X)$

↑ variable X

* Je trace aussi la droite d'équation $y = 0,001$

$Y_2 = 0,001$

Je constate graphiquement cela :



Donc, en utilisant la fonction : "intersect" je trouve 0,647196

Donc $P(U<-2) < 0,001$ pour $\sigma \in]0 ; 0,647[$

(ou bien dire pour $\sigma < 0,647$)

3pts