AP du 25/04/2016

Pour chacune des fonctions données ci-après :

1°) Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition.

2°) Etudier les variations de f.

3°) Dresser le tableau des variations de la fonction.

cas 1 : $f(x)=x^2\ln(x)$ définie sur $]0;+\infty[$. (on donne $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x)=0$)

cas 2 : $f(x)=(2-x)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

cas 3 : $f(x)=\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{e^x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

cas 4 : $f(x)=(x+1)e^{2x}+3$ définies sur $\mathbb{R}$.

Correction des exercices

cas 1. $f(x) = x^2 \ln(x)$ définie sur $]0;+\infty[$

1°) limite en 0^+

D'après l'énoncé, $\lim\limits_{x \to 0} x\ln(x) = 0$

Or $f(x) = x \cdot x\ln(x)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0}$

limite en $+\infty$: $f(x) = x^2 \ln(x)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2°) 3°) Les variations de f sont données par le signe de $f'(x)$

$f(x) = x^2 \ln(x) = u \cdot v$ avec $\begin{cases} u = x^2 & u' = 2x \\ v = \ln(x) & v' = \frac{1}{x} \end{cases}$

$f'(x) = u'v + uv' = 2x \cdot \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x}$

$f'(x) = 2x\ln(x) + x = x(2\ln(x) + 1)$

signe de $2\ln(x) + 1$

$2\ln(x) + 1 > 0$	$2\ln(x) + 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2\ln(x) > -1$	$\Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \ln(x) > -\frac{1}{2}$	$\Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$
$\Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}}$	

On en déduit le tableau

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		$+\infty$
x	||	$+$	|	$+$	
$2\ln(x)-1$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)=x(2\ln(x)-1)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| 0	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(e^{-\frac{1}{2}}) = (e^{-\frac{1}{2}})^2 \cdot \ln(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$$

cas 2 : $f(x) = (2-x)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$

1°) <u>limite en $-\infty$</u>

$$f(x) = 2e^x - xe^x$$

Or on sait que : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ (cours) donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 - 0 = 0}$

<u>limite en $+\infty$</u>

$$f(x) = (2-x)e^x$$

on sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} (2-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$

2°) 3°) Les variations de f sont données par le signe de $f'(x)$.

$$f(x) = (2-x)e^x = u.v \quad \text{avec} \begin{cases} u = 2-x & u' = -1 \\ v = e^x & v' = e^x \end{cases}$$

donc $f'(x) = u'v + uv' = -e^x + (2-x)e^x$

$$f'(x) = \left(-1+(2-x)\right)e^x = \underbrace{(1-x)}_{\text{fonction affine de coef. directeur } -1 \text{ qui s'annule pour } x=1} e^x$$

D'où le tableau.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x) = (1-x)e^x$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

$$f(1) = (2-1)e^1 = e$$

$\boxed{\text{cas 3}}$ $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{e^x}$ définie sur $\mathbb{R}$

1°) <u>limite en $-\infty$</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x}{3}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \text{ donc } \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right) = +\infty \end{array}\right\} \text{donc } \boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$$

(forme "$-\infty - \infty$")

<u>limite en $+\infty$</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{3}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (e^x) = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{e^x}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{donc } \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

2°) 3°) Les variations de $f(x)$ sont données par le signe de $f'(x)$.

$$f(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{e^x} = \frac{x}{3} - e^{-x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} - (-e^{-x}) = \frac{1}{3} + e^{-x}$$

On sait que $e^{-x} > 0$ pour tout x, donc $f'(x) = \frac{1}{3} + e^{-x} > 0$

Ainsi f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où le tableau.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{\text{cas } 4}$ $f(x) = (x+1)e^{2x} + 3$ définie sur $\mathbb{R}$

1°) <u>Limite en $-\infty$</u>

$$f(x) = xe^{2x} + e^{2x} + 3$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$$

cours

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2} 2x . e^{2x} = \frac{1}{2} \lim_{X \to -\infty} Xe^{X} = 0$$

on a pose $X = 2x$
et lorsque $x \to -\infty$, $X \to -\infty$

<u>donc</u> $$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 + 0 + 3 = 3}$$

<u>Limite en $+\infty$</u>

$$f(x) = (x+1)e^{2x} + 3$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty \end{array}\right\} \text{donc } \boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$$

2°) 3°) Les variations de f sont données par le signe de $f'(x)$

$$f(x) = (x+1)e^{2x} + 3 = u . v + 3 \quad \text{avec} \begin{cases} u = (x+1) & u' = 1 \\ v = e^{2x} & v' = 2e^{2x} \end{cases}$$

$$f'(x) = u'v + u v' + 0$$
$$= e^{2x} + (x+1) \times 2e^{2x}$$

$f'(x) = \left(1 + 2(x+1)\right)e^{2x}$

$f'(x) = (2x+3)e^{2x}$

D'où le tableau.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$(2x+3)$		$-$	0	$+$	
e^{2x}		$+$		$+$	
$f'(x) = (2x+3)e^{2x}$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$f(-\frac{3}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

← (fonction affine qui s'annule pour $x = -\frac{3}{2}$ de coef. directeur 2

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}+1\right)e^{-3} + 3 = -\frac{1}{2}e^{-3} + 3 \simeq 2{,}975$