Chapitre 1 : Suites numériques

I-Rappels

1°) Definition

Exemples :
- 1; 3; 5; 7; 9; 11;... est la suite des entiers impaires.
- 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; ... est la suite des inverses des entiers.

Définition :	Une suite numériques est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Si une suite est représentée par la lettre u alors :

$u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ (u est la fonction qui part de $\mathbb{N}$ est qui a des valeurs réelles)

$n \longmapsto u_n$ (on lit « u indice n »)

Remarque : $u(n) = u_n$: C'est le terme d'indice n.

Pour nommer toute la suite on peut dire :

- la suite u.
- la suite (u_n).
- la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2°) Différentes manières pour représenter une suite u .

a- **Sur un axe** : On donne la suite (u_n) définie par $u_n = 2n+1$ (n $\in\mathbb{N}$).
Représenter u_0, u_1, ..., u_4 sur un axe.

b-**Dans un repère** : Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{n}$ (n $\in\mathbb{N}^*$).
Représenter les 4 premiers termes de la suite dans un repère.

c-**La représentation en « escargot »** pour les suites définies par récurrences (voir plus loin).

3°) Différentes manières pour définir une suite u .

a-**Suite définie à l'aide d'une fonction**

Définition :	Soit f une fonction définie sur $[0;+\infty[$. On peut définir une suite (u_n) par : $u_n=f(n)$.

Exemple 1 : Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+2}{x+3}$. On peut définir la suite (u_n) par $u_n=f(n)$.
Calculer u_0 ; u_1 et u_2 .

Exemple 2 : On donne la suite (v_n) définie par $v_n=\dfrac{n^2+3}{2n^2+n+1}$.
Calculer v_0 ; v_1 .

v_0 =

v_1 =

Par quelle fonction g peut-on définir la suite (v_n) ?

b-**Suite définie par récurrence**

Définition :	On définit une suite par récurrence en indiquant le premier terme de la suite et un procédé de calcul permettant de calculer un terme à l'aide du précédent.

Exemple 1 : Soit (u_n) la suite définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = n - u_n - 2 \end{cases}$$ (la $2^{ième}$ ligne s'appelle la relation de récurrence)

Calculer :

$u_1 =$

$u_2 =$

$u_3 =$

Exemple 2 : Soit $g(x) = \frac{x}{2} - 1$.

La suite (v_n) est définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$.

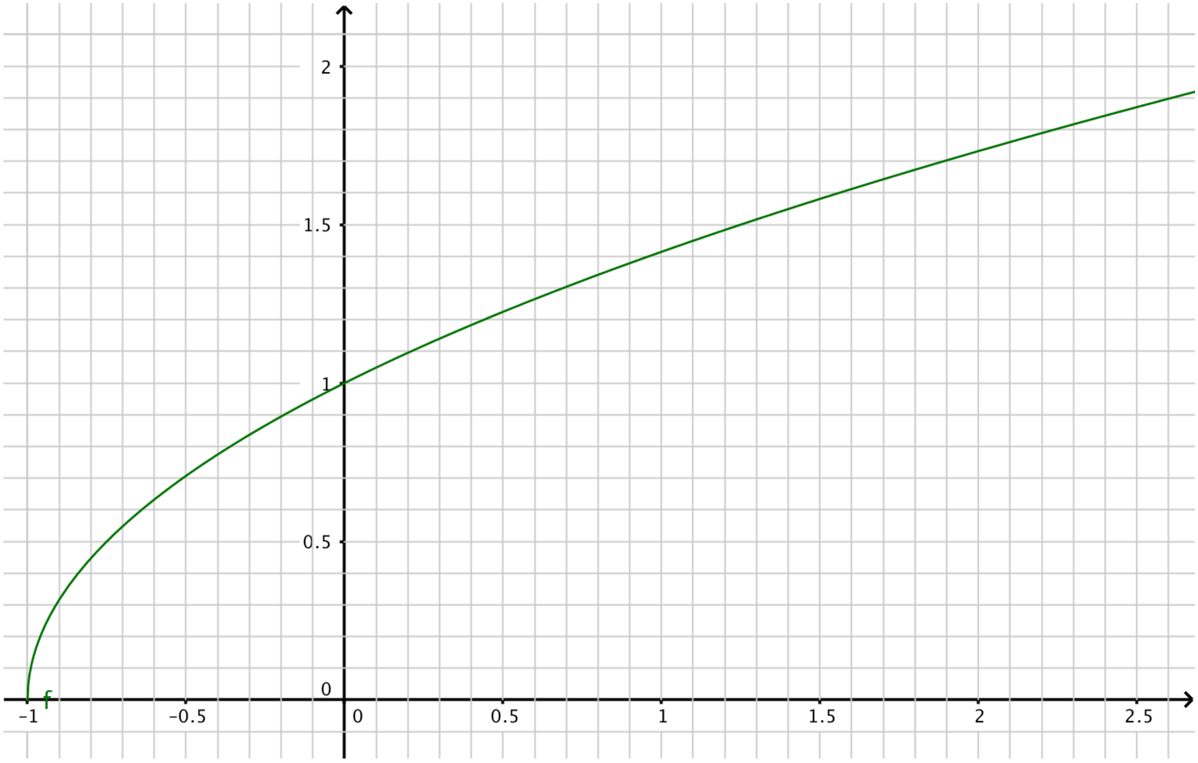
Calculer v_1, v_2 et v_3.

$v_1 =$

$v_2 =$

$v_3 =$

Exemple 3 : Soit f la fonction définie par le graphique suivant.



Soit (w_n) la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = -\dfrac{1}{2} \\ w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$

Construire graphiquement les premiers termes de la suite (Cette construction s'appelle la représentation en « escargot » de la suite w_n).

4°) Suites croissantes et décroissantes.

a-Définitions

Définition :	Une suite (u_n) est croissante si :

Définition :	Une suite (u_n) est décroissante si :

Définition :	Une suite (u_n) est constante si :

b-Exemples d'étude de variation d'une suite

En pratique, pour étudier les variations d'une suite on nétudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ la suite est _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ la suite est _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Si pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 0$ la suite est _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

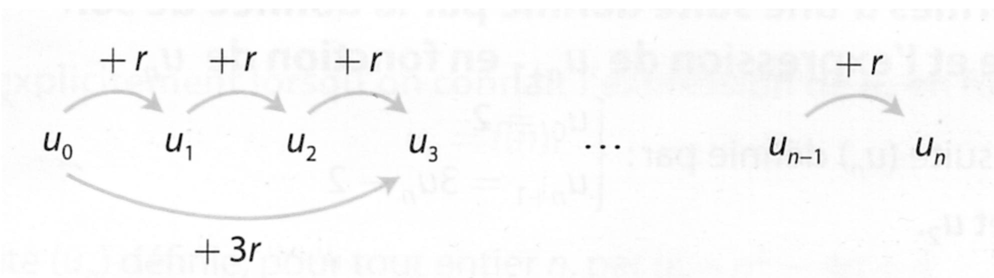
5°) Suites arithmétiques.

a-Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r. On a donc :

$$u_{n+1}=u_n+r$$

Le réel r est alors appelé raison de la suite.



Exemples :

1. La suite : 1, 6, 11, 16, 21, . . . est arithmétique de raison 5.
2. La suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1}=u_n-3 \end{cases}$$

   est arithmétique de raison (–3).

3. Soit u la suite définie par $u_n=3n-2$.

   $u_{n+1}-u_n$ = 3(n+1)–2–(3n–2) = 3n+3–2–3n+2=3

   La suite est donc arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0=-2$.

4. Soit v la suite définie par $v_n=n^2$.

   Cette suite est-elle arithmétique ?

Remarque : On dit qu'une suite (u_n) est arithmétique si on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre réel r. On a donc :

$$u_{n+1}=u_n+r$$

Le réel r est alors appelé raison de la suite.

b-Expression en fonction de n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

On a : $u_1 = u_0 + r$

$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$

u_3 =_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors : $u_n = u_0 + nr$

Remarques :

1. En particulier, la représentation graphique d'une suite arithmétique est formée de points alignés.
2. Plus généralement, si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et si u_1 est le premier terme,

on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$

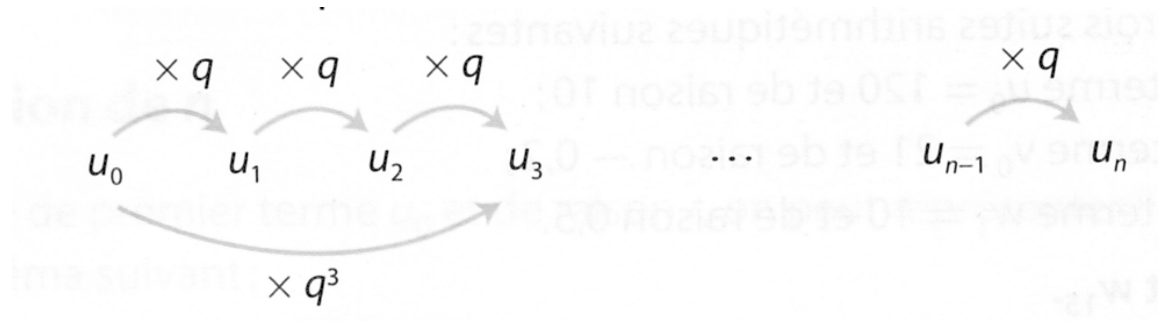
6°) Suites géométriques.

a-Définition, exemples

Définition : On dit qu'une suite (un) est géométrique si on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre réel q. On a donc :

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Le réel q est alors appelé raison de la suite.



Exemples :

1. La suite : 1, 2, 4, 8, 16, ... est géométrique de raison 2.
2. La suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$$

   est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$

3. La suite définie par $u_n = (-1)^n$ est géométrique de raison (–1).