II-La démonstration par récurrence

Pour démontrer qu'une propriété (formule, égalité, inégalité, etc.) est vraie pour tous les entiers naturels, il peut être commode de procéder à une démonstration par récurrence.

Pour rédiger une démonstration par récurrence on peut procéder ainsi :

On note clairement la propriété $P(n)$ que l'on veut démontrer. Ceci étant fait, on procède généralement en 3 étapes :

·**Initialisation** :
On vérifie que la propriété est vraie pour $n = n_0$ (Souvent $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$).

·**Hérédité** :
On suppose que la propriété est vraie pour un rang n donné (Cette hypothèse s'appelle l'hypothèse de récurrence) et on montre que dans ces conditions la propriété est vraie au rang n+1.
Autrement dit, on montre que : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

·**Conclusion** :
La propriété étant initialisée au rang n_0 et héréditaire, on en conclut qu'elle est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 2$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}$

Exemple 2

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n} \end{cases}$.

Montrer par récurrence sur n que :
pour tout n∈ℕ on a : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.