TD : Trigonométrie

Question 1

Résoudre sur $[0;2\pi]$ l'équation $\cos(x)=\frac{1}{2}$.

Question 2

Déterminer le signe de $\sqrt{(3)}-2\sin(x)$ sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$.

Question 3

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$f(x)=3x-\cos(x)$

$g(x)=7\sin(2x+1)$

$h(x)=x.\sin(x)$

$k(x)=2\sin(-3x+2)-\frac{4}{x}$

Question 4

Déterminer la limite en 0^+ de $k(x)=\frac{\sin(3x)}{2x}$.

Question 5

a) Encadrer la fonction $R(x)=x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x>0$.

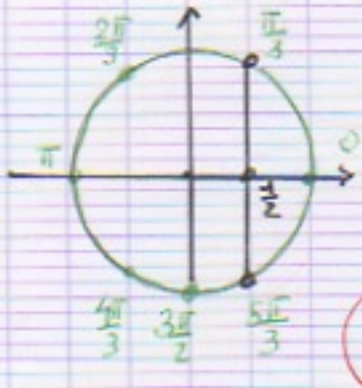
b) En déduire la limite en 0^+ de la fonction R(x).

c) Déterminer la limite en $+\infty$ de R(x) (On pourra poser $u=\frac{1}{x}$).

Corrigé du devoir

Question 1 : $\cos(x) = \frac{1}{2}$ avec $x \in [0; 2\pi]$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}}$ (voir cercle)



2pts

Question 2 : On raisonne sur $[-\pi; \pi]$

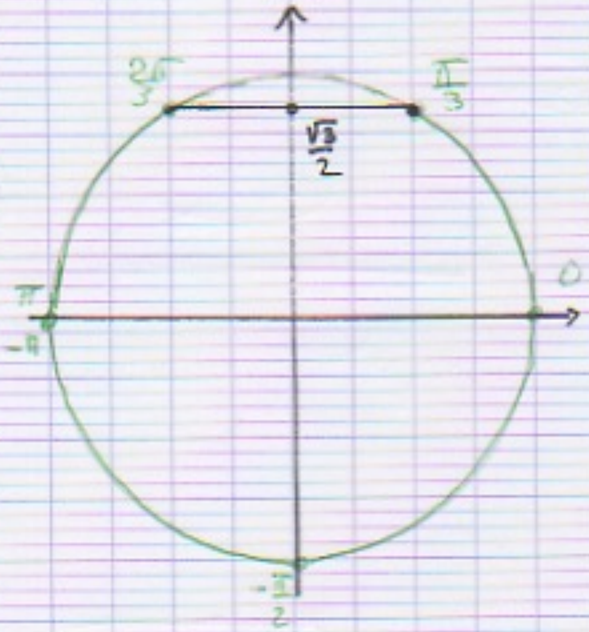
- $\sqrt{3} - 2\sin(x) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{3} \geqslant 2\sin(x)$

$\Leftrightarrow \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$

(voir cercle)



Toujours sur $[-\pi; \pi]$

- $\sqrt{3} - 2\sin(x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$

D'où le tableau de signe :

x	$-\pi$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sqrt{3} - 2\sin(x)$		+	0	−	0	+	

4pts

Question 3 : * $f(x) = 3x - \cos(x)$

donc $\boxed{f'(x) = 3 + \sin(x)}$

1pt

* $g(x) = 7\sin(2x+1)$

donc $g'(x) = 7 \times \cos(2x+1) \times 2$

$\boxed{g'(x) = 14\cos(2x+1)}$ 1pt

* $h(x) = x.\sin(x) = u.v$ avec $\begin{cases} u = x \\ v = \sin(x) \end{cases}$

$h'(x) = u'v + uv'$

$= 1 \times \sin(x) + x.\cos(x)$

$\boxed{h'(x) = \sin(x) + x\cos(x)}$ 1pt

* $k(x) = 2\sin(-3x+2) - \frac{4}{x}$

$k'(x) = 2.\cos(-3x+2) \times (-3) - 4 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$\boxed{k'(x) = -6\cos(-3x+2) + \frac{4}{x^2}}$ 1pt

Question 4 Nous savons que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1$, ou bien $\lim\limits_{u \to 0} \left(\frac{\sin u}{u}\right) = 1$

$k(x) = \frac{\sin(3x)}{2x} = \frac{\sin(3x)}{3x} \times \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)$

or lorsque $x \to 0^+$ alors $u = 3x \to 0^+$

donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right) = \lim\limits_{u \to 0^+} \left(\frac{\sin u}{u}\right) = 1$

Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} k(x) = \frac{3}{2} \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right) = \frac{3}{2} \times 1$

c.à.d $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} k(x) = \frac{3}{2}}$ 3pts

Question 5 a) pour tout $x>0$, $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

donc, comme $x>0$: $-x \leq x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$

Ainsi : pour $x>0$: $-x \leq R(x) \leq x$

2pts

b) Pour tout $x>0$ nous avons :
$-x \leq R(x) \leq x$
et
$\lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$
$\lim_{x\to 0^+}(x) = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} R(x) = 0}$$

3pts

c) Posons $u = \frac{1}{x}$ (donc $x = \frac{1}{u}$)

Avec cette notation : $R(x) = x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{u}\sin(u) = \frac{\sin(u)}{u}$

Or, lorsque $x \to +\infty$, $u \to 0^+$

Donc $\lim_{x\to+\infty} R(x) = \lim_{u\to 0^+} \frac{\sin(u)}{u} \underset{\text{cours.}}{=} 1$

conclusion : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} R(x) = 1}$

2pts