Classe: TSSI	Date: 16/12/2016	**Type**
Devoir n°10		**Devoir surveillé**
Thème: Geométrie de l'espace, trigonométrie.		

Exercice 1 (9 points)

1°) Placer, sur le cube de la page 2, les points I, J et K tels que :

$$\overrightarrow{EI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}\ ,\ \overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\ \text{ et }\ \overrightarrow{FK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FG}\ .$$

2°) Justifier que les droites (IK) et (EF) sont deux droites sécantes de l'espace.
On notera L leur point d'intersection. Placer L sur la figure.

3°) Justifier que L est un point du plan (ABF).

4°) Montrer que l'intersection des plans (IJK) et (ABC) est une droite parallèle à (IK) passant par J.

5°) Dessiner en couleur la section du cube par le plan (IJK).

6°) Montrer que la droite (EB) est orthogonale au plan (AFG).

Exercice 2 (11 points)

1°) Résoudre l'inéquation : $\cos(x)\geqslant\frac{1}{2}$ dans chacun des intervalles suivants :

a) $I=[0;2\pi]$; b) $I=[-\pi;\pi]$.

2°) a) Donner la définition de : « la fonction cos(x) est une fonction paire » .
b) Quel conséquence graphique cela entraîne-t-il ?

3°) Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f(x)=2x-\cos(3x)$$

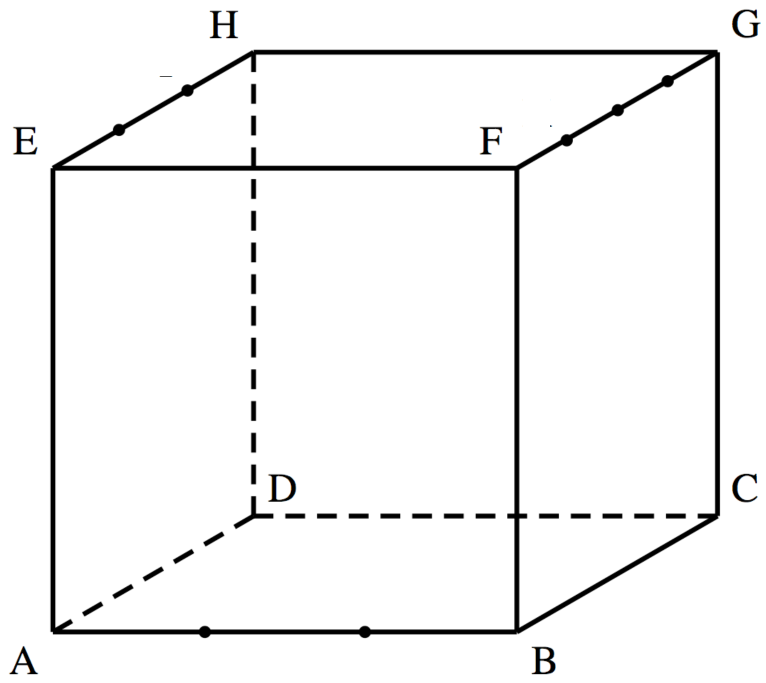
$$g(x)=x.\sin(x)$$

$$h(x)=\frac{1}{2+\sin(2x)}$$

4°) Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{5x}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sin(x)}{x}$ (On pourra d'abord encadrer $\frac{\sin(x)}{x}$ pour x>0)


H
G
E
F
D
C
A
B

Exercice 1

(0,5) 1°) voir figure.

2°) I, K, F et E sont dans le plan (EFG) (face supérieure du cube). Les droites (IK) et (FE) sont donc coplanaires : elles sont donc sécantes ou parallèles. Comme K et I sont deux

(1,5) points de deux cotés opposés du carré (EFGH) et que $EI = \frac{2}{3}a$ et $FK = \frac{1}{4}a$ (a : coté du carré) donc les droites ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.

3°) Comme $L \in (EF)$ et que (EF) est une droite du plan (ABF)

(1) (face avant du cube) donc $L \in (ABF)$

4°) Comme les plans (ABC) et (EFG) sont parallèles, le plan (IJK) coupera ces deux plans suivant deux droites parallèles (théorème du cours).

Or l'intersection de (IJK) avec (EFG) est la droite (IK)

(2) car $I \in (EFG)$ et $K \in (EFG)$, et l'intersection de (IJK) avec (ABC) est une droite passant par J car $J \in (AB)$: cette droite est donc parallèle à (IK).

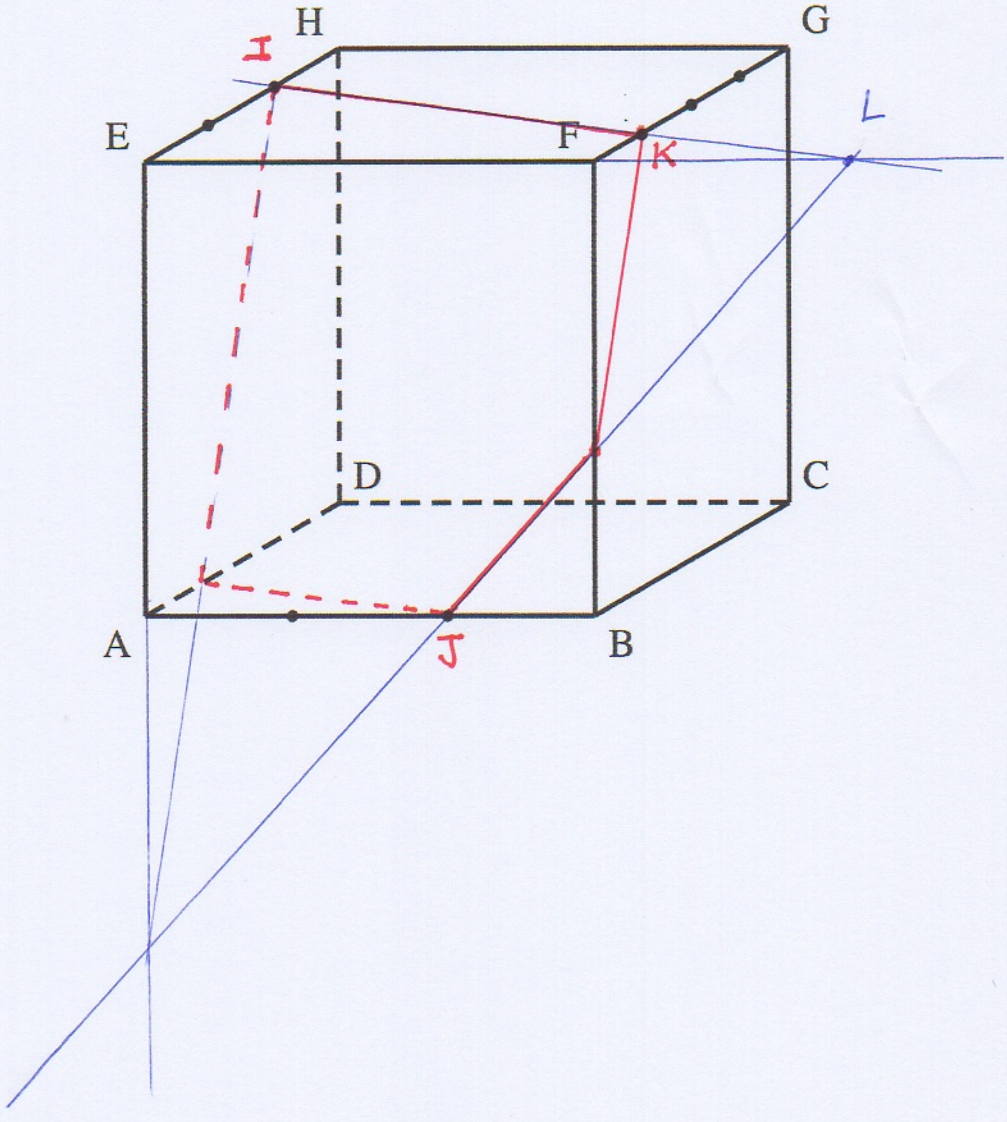
(2) 5°) Voir figure.

6°) Pour montrer que (EB) est orthogonale au plan (AFG) il suffit de montrer que (EB) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AFG) :

- $(EB) \perp (AF)$ car se sont des diagonales du carré (ABFE)
- (2) Comme (FG) est orthogonale au plan (ABFE) (propriété du cube) donc toute droite du plan (ABFE) est orthogonale à (FG) : en particulier $(EB) \perp (FG)$

Or (AF) et (FG) sont deux droites sécantes de (AFG)

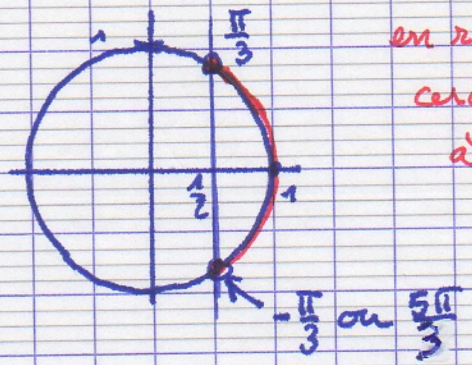
Donc (EB) est orthogonale au plan (AFG).


H
G
I
E
F
K
L
D
C
A
J
B

3/4

Exercice 2

1°) Dessinons le cercle trigonométrique pour les deux cas a) et b)



en rouge, les angles x du cercle qui correspondent à $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$

a) sur $[0; 2\pi]$

1,5 $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$ pour $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$

b) sur $[-\pi; \pi]$

1,5 $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$ pour $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$

2°) a) La fonction $\cos(x)$ est paire signifie que : $\cos(-x) = \cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
1

b) La représentation graphique de $x \mapsto \cos(x)$ est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
1

3°) $f(x) = 2x - \cos(3x)$ donc $\boxed{f'(x) = 2 + 3\sin(3x)}$ 1

$g(x) = x.\sin(x)$ donc $g'(x) = 1.\sin(x) + x\cos(x)$

$\boxed{g'(x) = \sin(x) + x\cos(x)}$ 1

$h(x) = \frac{1}{2+\sin(2x)} = \frac{1}{v}$ donc $h'(x) = -\frac{v'}{v^2}$

$\boxed{h'(x) = -\frac{2\cos(2x)}{(2+\sin(2x))^2}}$ 1

4°) a) $\frac{\sin(2x)}{5x} = \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{2x}{5x} = \frac{\sin(2x)}{2x} \times \frac{2}{5}$

or $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin(X)}{X} = 1$

on a posé $X = 2x$
lorsque $x \to 0$, $X \to 0$

(1,5)

Donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{5x}\right) = 1 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$

b) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$

Donc si $x > 0$: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$

Or :

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

(1,5)

Donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = 0$$