Classe: TSSI	Date: 16/12/2016	Type Devoir maison pour le 4/01/2017
Devoir n°11		
Thème: Probabilités conditionnelles		

Exercice 1

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

– la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99;

- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1°) Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1%. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note M l'évènement « la personne choisie est malade » et T l'événement « le test est positif ».

a) Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

b) Démontrer que la probabilité P(T) de l'événement T est égale à $1{,}989\times10^{-3}$

c) L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse? Justifier la réponse.

Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2°) Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population. À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Exercice 2

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent.
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine n+1 avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine n+1 avec une probabilité égale à 0,24.

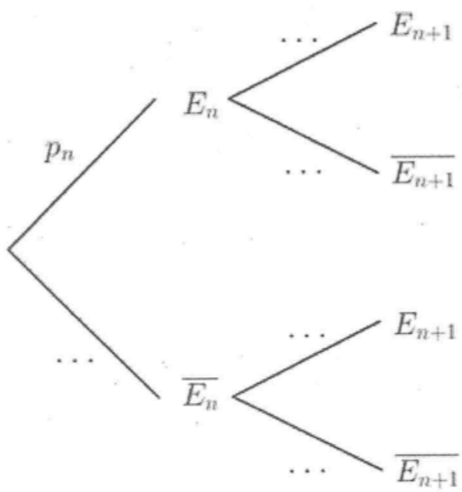
On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n.

On a ainsi $p_1=0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0\leqslant p_n<1$.

1. a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. a. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-contre.



b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1}=0{,}2p_n+0{,}04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n=p_n-0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q.
En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et q.

d. En déduire la limite de la suite (p_n) .

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que $P<0{,}05-10^{-K}$ P prend la valeur $0{,}2\times P+0{,}04$ J prend la valeur J+1 Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ? Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

Correction du devoir

Exercice 1

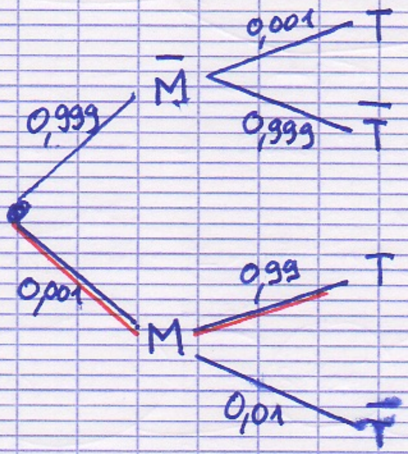
(8pts)

1°) a) D'après l'énoncé : $P(M) = 0{,}001$ $(0{,}01\ \%)$

$P_M(T) = 0{,}99$

$P_{\overline{M}}(T) = 0{,}001$

Traduisons ces données sous forme d'un arbre pondéré.



← événement $T \cap M$

1

b) D'après l'arbre :

$$P(T) = 0{,}001 \times 0{,}99 + 0{,}999 \times 0{,}001 = 0{,}001989$$

2 Donc $\boxed{P(T) = 1{,}989 \times 10^{-3}}$

c) Calculons : $P_T(M)$

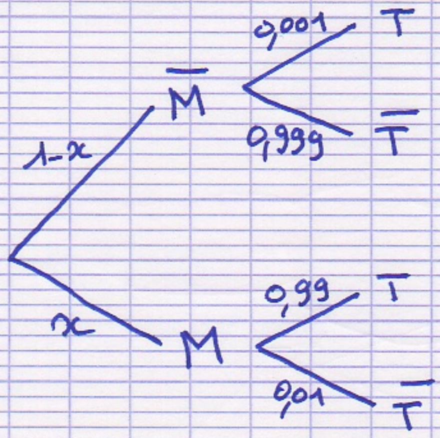
voir branche en rouge de l'arbre.

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0{,}001 \times 0{,}99}{1{,}989 \times 10^{-3}} \simeq 0{,}4977$$

2 Donc la probabilité que la personne soit malade sachant que le test est positif est inférieure à $\frac{1}{2}$. L'affirmation proposée est donc vraie.

2°) Dans cette question on suppose que $P(M) = x$

Refaisons l'arbre dans cette situation.



<u>Calculons</u> $P_T(M)$.

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0{,}99\,x}{0{,}99\,x + (1-x) \times 0{,}001}$$

$$P_T(M) = \frac{0{,}99x}{0{,}99x + 0{,}001 - 0{,}001\,x} = \frac{0{,}99\,x}{0{,}989\,x + 0{,}001}$$

Le laboratoire commercialise le test dès que : $P_T(M) \geqslant 0{,}95$

Résolvons cette inéquation :

$$P_T(M) \geqslant 0{,}95$$

$$\Longleftrightarrow \frac{0{,}99x}{0{,}989x + 0{,}001} \geqslant 0{,}95$$

on a multiplié les deux membres par $0{,}989\,x + 0{,}001$ qui est positif.

$$\Longleftrightarrow 0{,}99\,x \geqslant 0{,}95\,(0{,}989x + 0{,}001)$$

$$\Longleftrightarrow 0{,}99\,x \geqslant 0{,}93955\,x + 0{,}00095$$

$$\Longleftrightarrow 0{,}99x - 0{,}93955x \geqslant 0{,}00095$$

$$\Longleftrightarrow 0{,}05045x \geqslant 0{,}00095$$

on a divisé les deux membres par 0,05045 qui est positif

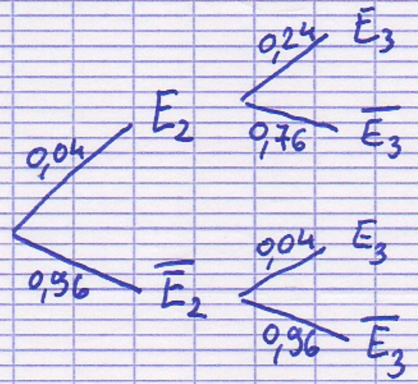
$$\Longleftrightarrow x \geqslant \frac{0{,}00095}{0{,}05045}$$

$$\Longleftrightarrow x \geqslant 0{,}01883$$

3 Le laboratoire commercialise le test dès que $x \geqslant 0{,}01883$, c'est à dire dès que le pourcentage de malade dans la population est plus grand que 1,883%.

Exercice 2 (12pts)

1a) Faisons un arbre de probabilités ; La première semaine le salarié n'est pas malade, donc nous commençons l'arbre avec la semaine 2.



cette branche représente l'évènement $E_2 \cap E_3$

$$p_3 = P(E_3) = 0{,}04 \times 0{,}24 + 0{,}96 \times 0{,}04 \quad \text{(d'après l'arbre)}$$
$$= 0{,}048$$

2 $\boxed{p_3 = 0{,}048}$

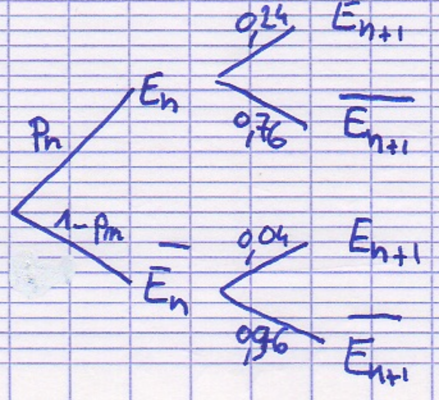
1b) On cherche $P_{E_3}(E_2)$

$$P_{E_3}(E_2) = \frac{P(E_3 \cap E_2)}{P(E_3)} = \frac{0{,}24 \times 0{,}04}{0{,}048} = 0{,}2$$

voir arbre

2 $\boxed{P_{E_3}(E_2) = 0{,}2}$

2a)

1 

2b) D'après l'arbre précédent :

$$p_{n+1} = P(E_{n+1}) = 0{,}24\, p_n + (1-p_n)$$
$$= 0{,}24\, p_n + 0{,}04 - 0{,}04\, p_n$$
$$= 0{,}2\, p_n + 0{,}04$$

2

$$\boxed{p_{n+1} = 0{,}2\, p_n + 0{,}04}$$

2c) $u_n = p_n - 0{,}05$ (donc $p_n = u_n + 0{,}05$)

Nous avons $u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}05$

$= 0{,}2\, p_n + 0{,}04 - 0{,}05$ (par déf. de p_{n+1})

$= 0{,}2(u_n + 0{,}05) + 0{,}04 - 0{,}05$

$= 0{,}2\, u_n + 0{,}01 - 0{,}01$

$= 0{,}2\, u_n$

2

Donc $u_{n+1} = 0{,}2\, u_n$: La suite (u_n) est donc géométrique de raison $\underline{q = 0{,}2}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0{,}05$

$\underline{u_1 = -0{,}05}$

On en déduit que : $u_n = q^{n-1} u_1 = (0{,}2)^{n-1} \times (-0{,}05)$

1

$$\boxed{u_n = -0{,}05 \times (0{,}2)^{n-1}}$$

Or $p_n = u_n + 0{,}05$ donc $\boxed{p_n = -0{,}05 \times (0{,}2)^{n-1} + 0{,}05}$

2d) Nous savons que $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}2)^n = 0$ car $-1 < 0{,}2 < 1$

Donc :

1

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} (p_n) = -0{,}05 \times 0 + 0{,}05 = 0{,}05}$$

2e) Dans l'algorithme, J prend la valeur 1 au début et est incrémenté à chaque boucle. P prend la valeur 0 au début (il représente donc p_0). Dans la boucle P prend la valeur $0,2 \times P + 0,04$ ($p_{n+1} = 0,2\, p_n + 0,04$). Donc en fin de boucle, P contient la valeur p_J.

1

L'algorithme s'arrête lorsque $P < 0,05 - 10^{-k}$. On est certain qu'il s'arrête car $\lim_{n \to +\infty} p_n = 0,05$ et que (p_n) est croissante.

Lorsqu'il s'arrête, il affichera le rang J pour lequel on aura une précision de 10^{-k} pour la limite.