Devoir n°12

EXERCICE 1

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.
L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante :

30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- Les $\frac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- Les $\frac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les événements suivants :
C : « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;
V : « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;
J : « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;
H : « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;
S : « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ».
On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?
2. On sait que $P(H) = \frac{13}{20}$.
   a. Les événements C et H sont-ils indépendants ?
   b. Calculer $P(J \cap H)$ et $P_J(H)$.

EXERCICE 2 :

L'entreprise *Fructidoux* fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».
La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide.
Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.

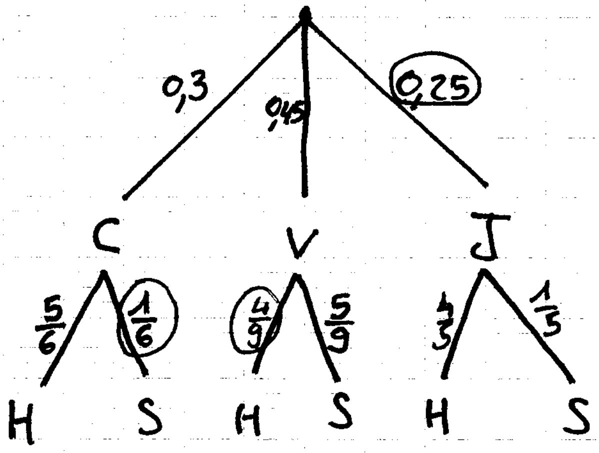
La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale.
On considère les événements :
E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2. »
C : « Le petit pot est conforme. »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.
2. Calculer la probabilité de l'événement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »
3. Déterminer la probabilité de l'événement C.
4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'événement E sachant que l'événement C est réalisé.

Correction du devoir

Exercice 1 : En utilisant les notations de l'énoncé, je construis l'arbre de probabilités suivant :



1°) On cherche $P(C \cap H)$

On sait que $P(C \cap H) = P_C(H) \times P(C) = \frac{5}{6} \times 0{,}3 = \frac{5}{2 \times 3} \times 0{,}3 = \frac{5}{20} = 0{,}25$ (2)

2°) a) D'après l'arbre (ou l'énoncé), on sait que $P_C(H) = \frac{5}{6}$

or $P(H) = \frac{13}{20}$ donc $P_C(H) \neq P(H)$ donc H et C ne sont pas indépendants (2)

b) D'après l'arbre on a : (formule des probabilités totales)

$$P(H) = 0{,}3 \times \frac{5}{6} + 0{,}45 \times \frac{4}{9} + 0{,}25 \times P_J(H)$$

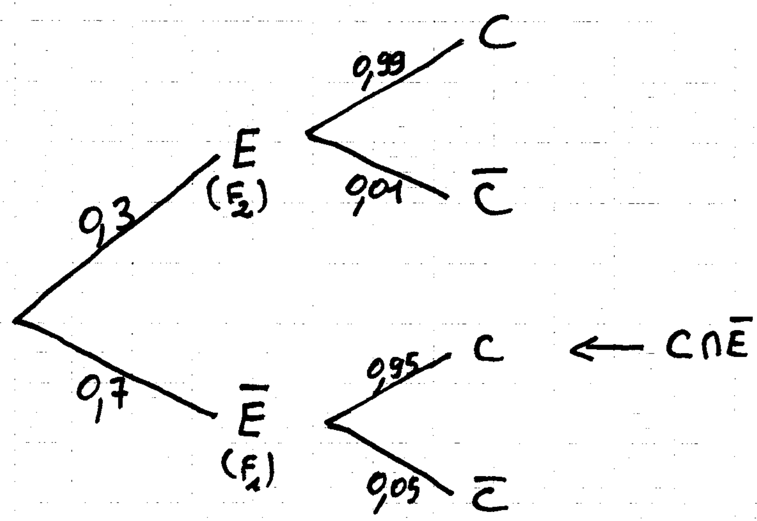
Donc $\frac{13}{20} = \frac{5}{20} + 0{,}05 \times 4 + \frac{1}{4} \times P_J(H)$

D'où $\frac{1}{4} P_J(H) = \frac{13}{20} - \frac{5}{20} - \frac{4}{20}$ $\boxed{P_J(H) = 4 \times \frac{4}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}}$ (3)

Donc aussi $\boxed{P(J \cap H) = P_J(H) \times P(J) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}}$ (3)

Exercice 2

1°)



3

2°) <u>On cherche</u> $P(C \cap \bar{E})$

D'après l'arbre : $P(C \cap \bar{E}) = P_{\bar{E}}(C) \times P(\bar{E}) = 0{,}95 \times 0{,}7 = 0{,}665$ 2

3°) D'après l'arbre : $P(C) = 0{,}95 \times 0{,}7 + 0{,}99 \times 0{,}3 = 0{,}962$ 2

4°) $P_C(E) = \dfrac{P(C \cap E)}{P(C)} = \dfrac{0{,}99 \times 0{,}3}{0{,}962} = 0{,}309$ arrondie à 10^{-3} près.

3