Classe: TS SI	Date: 17/01/17	**Type**
Devoir n°13		**Devoir Maison** **pour le 25/01/17**
Thème: Continuité et théorème des v.i.		

Exercice 1

Soit f la fonction : $x \longmapsto x+\sin(x)$.

1°) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Dresser le tableau des variations de f sur $[0;\pi]$.

3°) Démontrer qu'il existe un réel α_0 et un seul de $[0;\pi]$ tel que $f(\alpha_0)=\frac{\pi}{2}$.

4°) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α_0 à 10^{-2} près.

Exercice 2

On considère l'équation (E): $x^3+3x-2=0$.

1°) Justifier que (E) admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

2°) Vérifier que α est strictement compris entre 0 et 1, puis donner, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

Exercice 3

P est la fonction définie par:

$$P(x)=2x^3-3x^2-1.$$

1°) Justifier la continuité de P sur $\mathbb{R}$.

2°) Étudier les limites de P en $-\infty$ et en $+\infty$.

3°) Étudier les variations de P et dresser son tableau des variations.

4°) Démontrer que l'équation P(x)=0 admet une unique solution α.

5°) Par balayage, déterminer une valeur approchée de α à 0,01 près.

Corrigé du devoir

Exercice 1 : (7 points)

1°) La fonction $f(x) = x + \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est continue sur $\mathbb{R}$.

2°) Les variations de f sont données par le signe de $f'(x)$.

$f'(x) = 1 + \cos(x)$

Comme $\cos(x) \geqslant -1$, donc $\cos(x) + 1 \geqslant 0$ donc $f'(x) \geqslant 0$.

De plus, sur $[0;\pi]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = -1 \Leftrightarrow x = \pi$

D'où le tableau :

x	0		π
$f'(x)$		$+$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	π

3°) f étant continue, strictement croissante sur $[0;\pi]$ et $f(0) = 0$, $f(\pi) = \pi$.
Comme $\frac{\pi}{2} \in [0;\pi]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α_0 tel que :

$$f(\alpha_0) = \frac{\pi}{2}.$$

4°) A l'aide de la calculatrice :

$\begin{cases} f(0{,}8) \simeq 1{,}51 \\ f(0{,}9) \simeq 1{,}68 \end{cases}$ donc $0{,}8 < \alpha_0 < 0{,}9$

$\begin{cases} f(0{,}83) \simeq 1{,}56 \\ f(0{,}84) \simeq 1{,}58 \end{cases}$ donc $0{,}83 < \alpha_0 < 0{,}84$

conclusion : $\alpha_0 \simeq 0{,}83$ à 10^{-2} près par défaut.

$(\alpha_0 \simeq 0{,}831711)$

Exercice 2 : (5 points)

Posons $g(x) = x^3 + 3x - 2$ (Attention, (E) est une équation, pas une fonction !)

L'équation (E) s'écrit alors :

$$g(x) = 0$$

1°) g est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$

Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue (car c'est un polynôme) sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 3x = -\infty \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty \end{array}\right\} \text{ donc } \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$$

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

2°) $\left\{\begin{array}{l} g(0) = -2 < 0 \\ g(1) = 2 > 0 \end{array}\right.$ donc $\boxed{0 < \alpha < 1}$

$\left\{\begin{array}{l} g(0{,}5) < 0 \\ g(0{,}6) > 0 \end{array}\right.$ donc $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$

$\left\{\begin{array}{l} g(0{,}59) < 0 \\ g(0{,}60) > 0 \end{array}\right.$ donc $0{,}59 < \alpha < 0{,}60$

$g(0{,}596) < 0$
$g(0{,}597) > 0$ donc $\boxed{0{,}596 < \alpha < 0{,}597}$

Exercice 3 : 1°) P est un polynôme, elle est donc continue sur $\mathbb{R}$
(8 points)

2°) $P(x) = x^3\left(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right)$

or $\lim\limits_{x \to \pm\infty}\left(2 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 2 - 0 - 0 = 2$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 \times 2 = -\infty}$

et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 \times 2 = +\infty}$

3°) Les variations de P sont données par le signe de $P'(x)$.

$P'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$ (je factorise)

$P'(x)$ est un polynôme de degré 2, il est donc du signe de $a = 6$ sauf entre les racines $x = 0$ ou $x = 1$ (voir factorisation de $P'(x)$)

D'où le tableau :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$P(0) = -1$

$P(1) = -2$

4°) * Sur l'intervalle $]-\infty; 1[$, P admet un maximum qui est -1, donc sur cet intervalle, l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution.

* Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, P est continue, strictement croissante, avec $P(1) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires l'équation $P(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1; +\infty[$

conclusion finale : $\boxed{\text{L'équation } P(x) = 0 \text{ a une unique solution } \alpha \text{ sur } \mathbb{R}}$

5°) * $P(1) = -2$ et $P(2) = 3$ donc $1 \leq \alpha \leq 2$

* $P(1{,}6) \simeq -0{,}48$ et $P(1{,}7) \simeq 0{,}156$ donc $1{,}6 < \alpha < 1{,}7$
* $P(1{,}67) \simeq -0{,}05$ et $P(1{,}68) \simeq 0{,}01$ donc $1{,}67 < \alpha < 1{,}68$

Donc $\boxed{\alpha \simeq 1{,}67 \text{ à } 10^{-2} \text{ près par défaut}}$