Classe: TSSI	Date: 17/03/17	**Type**
Devoir n°15		**Devoir maison pour le 24/03/17**
Thème: exponentielle		

Exercice 1 : rédiger l'exercice 144 page 120.

Exercice 2: QCM (aucune justification est demandée)

1 Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est exacte.

1. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{2x} - 3e^{x} - 4 = 0$ admet :

☐ **a.** aucune solution. ☐ **b.** une seule solution. ☐ **c.** deux solutions.

2. L'expression $-e^{-x}$:

☐ **a.** n'est jamais négative. ☐ **b.** est toujours négative.

☐ **c.** n'est négative que si x positif. ☐ **d.** n'est négative que si x négatif.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2e^{x} - 1}{e^{x} + 2}$ est égale à :

☐ **a.** $-\dfrac{1}{2}$ ☐ **b.** 1 ☐ **c.** 2 ☐ **d.** $+\infty$

2 L'expression $e^{x}(2e^{-x} - 1)$ est égale à :

☐ **a.** $2e^{-x^2} - e^{x}$ ☐ **b.** $2 - e^{x}$ ☐ **c.** $-2(e^{x})^2 - e^{x}$

3 La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est :

☐ **a.** croissante sur $\mathbb{R}$. ☐ **b.** négative sur $\mathbb{R}$. ☐ **c.** décroissante sur $\mathbb{R}$.

4 $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x}$ est égale à :

☐ **a.** $-\infty$ ☐ **b.** $+\infty$ ☐ **c.** 0

5 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (x+1)e^{2x}$ et $g(x) = \dfrac{1-x}{e^{2x}}$.

Dans les questions suivantes une seule réponse est exacte.

1. Pour tout réel x on a :

☐ **a.** $f'(x) = 2(x+1)f(x)$ ☐ **b.** $f'(x) = 2f(x)$ ☐ **c.** $f'(x) - 2f(x) = e^{2x}$

2. On a :

☐ **a.** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ☐ **b.** $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$ ☐ **c.** $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + g(x)) = +\infty$

3. L'équation $f(x) = 1$ admet dans $\mathbb{R}$:

☐ **a.** une unique solution. ☐ **b.** deux solutions. ☐ **c.** aucune solution.

6 Répondre par vrai ou faux.

☐ **a.** Pour tous réels a et b, $e^{a+b} = \sqrt{e^{2a}e^{2b}}$.

☐ **b.** Pour tous réels a et b, $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$.

☐ **c.** Il existe un réel a et un réel b tels que $2e^{a+b} = e^{2a} + e^{2b}$.

☐ **d.** Il existe un réel a et un réel b tels que $e^{2a} + e^{2b} < 2e^{a+b}$.

Penser aux identités remarquables.

144 Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = 2x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

1. Vérifier que pour tout réel x on a :

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{e^x + 1}.$$

2. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f au point d'abscisse 0.

n° 144 page 120

$$f(x) = 2x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

1°) Plusieurs méthodes

- méthode 1 : On part de l'expression de $f(x)$.

$$f(x) = 2x - \frac{e^x-1}{e^x+1} = 2x - \frac{e^x+1-2}{e^x+1} = 2x - \left(\frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{2}{e^x+1}\right)$$

$$= 2x - \left(1 - \frac{2}{e^x+1}\right) = 2x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$$

$\boxed{\text{CQFD}}$

- méthode 2 : On part de l'expression proposée et l'on montre qu'elle est égale à $f(x)$.

$$2x - 1 + \frac{2}{e^x+1} = 2x - \frac{e^x+1}{e^x+1} + \frac{2}{e^x+1}$$

A remarquer :
A ce stade, je ne sais pas que c'est $f(x)$

$$= 2x + \frac{-(e^x+1)+2}{e^x+1} = 2x + \frac{-e^x-1+2}{e^x+1}$$

$$= 2x + \frac{-e^x+1}{e^x+1} = 2x - \frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$= f(x)$$

ici, on constate que c'est $f(x)$.

$\boxed{\text{CQFD}}$

- méthode 3 : On montre que la différence est nulle.

$$f(x) - \left(2x - 1 + \frac{2}{e^x+1}\right) = \cancel{2x} - \frac{e^x-1}{e^x+1} - \cancel{2x} + 1 - \frac{2}{e^x+1}$$

$$= \frac{-(e^x-1)}{e^x+1} + \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{2}{e^x+1}$$

$$= \frac{-e^x + 1 + e^x + 1 - 2}{e^x + 1} = \frac{0}{e^x+1} = 0$$

Donc $f(x) - \left(2x - 1 + \frac{2}{e^x+1}\right) = 0$

3pts

Donc $f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$ $\boxed{\text{CQFD}}$

2°) Pour les limites en $\pm\infty$ j'utilise l'expression :

$$f(x) = 2x - 1 + \frac{2}{e^x+1}$$

2pts

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{2}{e^x+1}\right) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (2x - 1) = -\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

2pts

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{e^x+1}\right) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (2x - 1) = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

3°) Le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 est $f'(0)$

Calculons $f'(x)$

$$f(x) = 2x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 2x - \frac{u}{v} \quad \text{avec} \quad \begin{matrix} u = e^x - 1 & u' = e^x \\ v = e^x + 1 & v' = e^x \end{matrix}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{u'v - uv'}{v^2} = 2 - \frac{e^x(e^x+1) - (e^x - 1)e^x}{(e^x+1)^2}$$

2pts

$$f'(x) = 2 - \frac{e^x\left[(e^x+1) - (e^x - 1)\right]}{(e^x+1)^2} = 2 - \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

1pt

On a donc $f'(0) = 2 - \frac{2e^0}{(e^0+1)^2} = 2 - \frac{2}{4} = 2 - \frac{1}{2}$

$f'(0) = \frac{3}{2}$

<u>conclusion</u> : Le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 est $\frac{3}{2}$.

1 Pour chaque question, une et une seule des réponses proposées est exacte.

1. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^{2x}-3e^{x}-4=0$ admet :

☐ **a.** aucune solution. ☒ **b.** une seule solution. ☐ **c.** deux solutions.

2. L'expression $-e^{-x}$:

☐ **a.** n'est jamais négative. ☒ **b.** est toujours négative.

☐ **c.** n'est négative que si x positif. ☐ **d.** n'est négative que si x négatif.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{x}-1}{e^{x}+2}$ est égale à :

☐ **a.** $-\dfrac{1}{2}$ ☐ **b.** 1 ☒ **c.** 2 ☐ **d.** $+\infty$

2 L'expression $e^{x}(2e^{-x}-1)$ est égale à :

☐ **a.** $2e^{-x^2}-e^{x}$ ☒ **b.** $2-e^{x}$ ☐ **c.** $-2(e^{x})^2-e^{x}$

3 La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est :

☐ **a.** croissante sur $\mathbb{R}$. ☐ **b.** négative sur $\mathbb{R}$. ☒ **c.** décroissante sur $\mathbb{R}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}$ est égale à :

☐ **a.** $-\infty$ ☐ **b.** $+\infty$ ☒ **c.** 0

5 Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=(x+1)e^{2x}$ et $g(x)=\dfrac{1-x}{e^{2x}}$.

Dans les questions suivantes une seule réponse est exacte.

1. Pour tout réel x on a :

☐ **a.** $f'(x)=2(x+1)f(x)$ ☐ **b.** $f'(x)=2f(x)$ ☒ **c.** $f'(x)-2f(x)=e^{2x}$

2. On a :

☐ **a.** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ☐ **b.** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ ☒ **c.** $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+g(x))=+\infty$

3. L'équation $f(x)=1$ admet dans $\mathbb{R}$:

☒ **a.** une unique solution. ☐ **b.** deux solutions. ☐ **c.** aucune solution.

6 Répondre par vrai ou faux.

V **a.** Pour tous réels a et b, $e^{a+b}=\sqrt{e^{2a}e^{2b}}$.

F **b.** Pour tous réels a et b, $2e^{a+b}=e^{2a}+e^{2b}$.

V **c.** Il existe un réel a et un réel b tels que $2e^{a+b}=e^{2a}+e^{2b}$.

F **d.** Il existe un réel a et un réel b tels que $e^{2a}+e^{2b}<2e^{a+b}$.

Penser aux identités remarquables.

Corrigé du devoir

1 1) réponse b

- résolution par calcul.

$$e^{2x}-3e^{x}-4=0$$

$$\Leftrightarrow X^2-3X-4=0 \quad \text{où} \quad X=e^x$$

(car dans ce cas $X^2=e^{2x}$)

Ceci est classique lorsqu'on a une équation où interviennent e^x, e^{2x}, e^{3x}... on posera souvent : $X=e^x$

c'est une équation du second degré, $\Delta=9+16=25$
Il y a deux racines : $X_0=-1$; $X_1=4$

$$\Leftrightarrow X=-1 \text{ ou } X=4 \quad \text{avec} \quad X=e^x$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{e^x=-1}_{\text{aucune solution car } e^x \text{ est toujours strictement positive}} \text{ ou } e^x=4$$

$$\Leftrightarrow e^x=4$$

$$\Leftrightarrow x=\ln 4$$: Il n'y a qu'une seule solution

- En utilisant la calculatrice : On trace la représentation graphique de $f(x)=e^{2x}-3e^x-4$. On "constate" qu'il n'y a qu'un seul point d'intersection avec l'axe (Ox). Il y a donc une unique solution à l'équation $f(x)=0$.

2) réponse b

Pour tout réel x, $e^x>0$ donc $e^{-x}>0$ donc $-e^{-x}<0$

3) réponse c.

- résolution par calcul

$$\underbrace{\frac{2e^x-1}{e^x+2}}_{\text{en } +\infty \text{, on obtient une forme indéterminée}}=\frac{e^x\left(2-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}=\frac{2-e^{-x}}{1+2e^{-x}}$$

$e^{-x}\to 0$, $2e^{-x}\to 0$ $\Big\} \to \frac{2}{1}=2$

On soulève l'indétermination en mettant en facteur le terme du numérateur et dénominateur qui semble l'emporter : ici e^x car il devient très vite très grand.

- Avec la calculatrice : On trace $f(x)=\dfrac{2e^x-1}{e^x+2}$

dans un repère du type : $X_{min}=-2$ $X_{max}=10$
$Y_{min}=-1$ $Y_{max}=3$

Il semble bien que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

2 réponse b	facile par calcul : $e^x(2e^{-x}-1) = 2e^{-x}.e^{x} - e^{x}$ $= 2e^{0} - e^{x} = 2 - e^{x}$
3 réponse c	<u>méthode 1</u> : $f(x) = e^{-x}$ donc $f'(x) = -e^{-x} < 0$, donc f est croissante b est faux car $e^{-x} > 0$ <u>méthode 2</u> : $x \mapsto -x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto e^{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto e^{-x}$ est donc la composée d'une fonction décroissante par une fonction croissante : elle est décroissante sur $\mathbb{R}$.
4 réponse c.	C'est pratiquement du cours
5 1) réponse c	On calcule : $f(x) = (x+1)e^{2x} = u.v$. $f'(x) = u'v + uv' = 1 \times e^{2x} + (1+x).2e^{2x}$ $= (1+2+2x)e^{2x} = (3+2x)e^{2x}$ a) et b) sont faux : mais $f'(x) - 2f(x) = [(3+2x) - 2(x+1)]e^{2x}$ $= (1+0x)e^{2x} = e^{2x}$
2) réponse c	<u>Par calcul</u> : $\underset{\text{en } -\infty}{f(x)} = \underbrace{xe^{2x}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{(cours)}}} + \underbrace{e^{2x}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{cours}}} \rightarrow 0$ a) est faux $\underset{\text{en } -\infty}{g(x)} = \dfrac{1-x \rightarrow +\infty}{e^{2x} \rightarrow 0^+} \Big\} \rightarrow +\infty$ b) est faux. vu les résultats précédents $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + g(x) = 0 + (+\infty) = +\infty$

3) réponse a

• premier réflexe : on écrit l'équation

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow (x+1)e^{2x} = 1 \Leftrightarrow \underbrace{(x+1)e^{2x} - 1 = 0}$$

Le problème c'est qu'on n'arrive pas à isoler l'inconnue x car elle intervient dans l'exponentielle et en même temps ailleurs.

On se dirige vers une autre méthode

On a calculé $f'(x) = (3+2x)e^{2x}$
(question 5.1)

Or le signe de $f'(x)$ est simple car $e^{2x} > 0$, on dresse alors le tableau des variations.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
		$-$	0	$+$	
e^{2x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(-\frac{3}{2})$	$\nearrow$	$+\infty$

calculé question $\boxed{5}$2

car $f(x) = \underbrace{(x+1)}_{\downarrow} \underbrace{e^{2x}}_{\downarrow}$
$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$

$f(-\frac{3}{2}) \simeq -0{,}02$ (calculatrice)

D'après les variations, il y a une seule solution à l'équation $f(x) = 1$ (elle est située dans l'intervalle $]-\frac{3}{2} ; +\infty[$)

→ Remarques : • $f(0) = 1$, donc la solution est 0.

• On pouvait utiliser la calculatrice pour répondre.

6 a) vrai	$e^{a+b} = \sqrt{(e^{a+b})^2} = \sqrt{e^{2(a+b)}} = \sqrt{e^{2a+2b}} = \sqrt{e^{2a}.e^{2b}}$ attention, en général : $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$ et non x mais si $x>0$, l'égalité $\sqrt{x^2}=x$ est vraie, ce qui est le cas ici car $e^{a+b}>0$
b) faux	prenons $a=-1$ et $b=+1$ l'égalité s'écrit : $2e^0 = e^{-2}+e^2$ c.à.d : $2 = e^{-2}+e^2$ qui est fausse
c) vrai	si on prend $a=0$ et $b=0$, l'égalité est vraie
d) faux	En effet : $e^{2a}+e^{2b}-2e^{a+b} = (e^a)^2+(e^b)^2-2e^a.e^b$ $= (e^a-e^b)^2$ (identité remarquable.) Or un carré est tjours positif ou nul. On a donc montré que : $e^{2a}+e^{2b}-2e^{a+b} \geqslant 0$ pour tous $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ Donc $e^{2a}+e^{2b} \geqslant 2e^{a+b}$ pour tous $a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}$. On n'aura donc jamais : $e^{2a}+e^{2b}<2e^{a+b}$

synthèse :

1	1b	1pts
	2b	1pts
	3c	1pt
2	b	2pts
3	c	2pts
4	c	2pts
5	1c	1pt
	2c	1pt
	3a	1pt
6	a) vrai	2pts
	b) faux	2pts
	c) vrai	2pts
	d) faux	2pts

on enlève la moitié par réponse fausse.