Classe: TSSI	Date: 7/04/2017	**Type**
Devoir n°17		**Devoir surveillé**
Thème: Exponentielle, nombres complexes et logaritme.		

Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur ℝ par : $f(x)=2x+1-xe^{x-1}$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal .

1°) Étudier la limite de f en −∞ puis en +∞ (on écrira : $xe^{x-1}=\frac{1}{e}xe^{x}$)

2°) a) Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de f.

b) Déterminer les variations de f' en précisant la limite de f' en −∞.

c) Calculer f'(1) et en déduire le signe de f'(x) pour tout réel x.

d) Dresser le tableau de variations de f.

3°) a) En utilisant l'étude précédente, déterminer le nombre de solutions de l'équation :

$$2x+1-xe^{x-1}=0$$

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près des deux solutions.

Exercice 2

On considère les deux nombres complexes suivants:

$$z_1=e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_2=e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

1°) Écrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.

2°) Déterminer les écritures sous forme algébrique, exponentielle et trigonométrique de $z_1 z_2$.

3°) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : f(x)=x.ln(x)-3x

1°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

(On admet que : $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln(x)=0$)

2°) Calculer f'(x).

3°) Dresser le tableau des variations de f.

Correction du devoir

Exercice 1 1°) <u>limite en $-\infty$</u>

$$f(x) = 2x+1-xe^{x-1} = 2x+1-xe^{x}.e^{-1} = 2x+1-xe^{x}\cdot\frac{1}{e}$$

Donc $f(x) = 2x+1-\frac{1}{e}xe^{x}$

On a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x} = 0 \quad (\text{cours})\end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$ 1

<u>limite en $+\infty$</u>

$$f(x) = 2x+1-xe^{x-1} = x\left(2+\frac{1}{x}-xe^{x-1}\right)$$

On a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x-1} = +\infty\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\frac{1}{2}-xe^{x-1}\right) = -\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}(x) = +\infty$, on en déduit : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$ 1

2°) a) $f(x) = 2x+1-xe^{x-1}$

donc $f'(x) = 2+0-\left(1e^{x-1}+xe^{x-1}\right) = \boxed{2-(x+1)e^{x-1}}$ 1

ainsi $f''(x) = 0-\left[1e^{x-1}+(x+1)e^{x-1}\right] = \boxed{-(x+2)e^{x-1}}$ 1

b) Les variations de $f'(x)$ sont données par le signe de $f''(x)$.

a $f''(x) = -(x+2)e^{x-1}$.

Faisons un tableau :

Signe 1

1

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	
e^{x-1}		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	2	$\nearrow$		$\searrow$	

$\leftarrow$ car $f''(x) = -(x+2)e^{x-1}$

limite de $f'(x)$ en $-\infty$: $f'(x) = 2 - xe^{x-1} - e^{x-1}$

$$f'(x) = 2 - \frac{1}{e}xe^{x} - e^{x-1}$$

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x-1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$ (cours)

1 Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = 2}$

c) $f'(1) = 2 - 2e^{0} = 2 - 2 = 0$

Vu les variations de f et le fait que $f'(1) = 0$ et compte tenu de la limite en $-\infty$, on en déduit le signe de $f'(x)$

1

d) 1

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$f(1) = 2 + 1 - e^{0}$
$= 2 + 1 - 1$
$= 2$

3a) $2x+1-xe^{x-1}=0$

$\iff f(x)=0$

Or f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable)

- Sur l'intervalle $]-\infty;1[$, f est strictement croissante avec $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $f(1)>0$, il y a donc une unique solution sur cet intervalle. Je la note x_1.

1

- Sur l'intervalle $]1;+\infty[$, f est strictement décroissante avec $f(1)>0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, il y a donc une unique solution sur cet intervalle. Je la note x_2.

3b) En utilisant la calculatrice je trouve :

$x_1 \simeq -0,559$ arrondie à 10^{-3} près.

1

$x_2 \simeq 1,924$ arrondie à 10^{-3} près

Exercice 2

1°) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 0,5

$z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$ 0,5

2°) $z_1 \cdot z_2$ sous forme algébrique.

$z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{4}$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}$$ 1

$z_1 \cdot z_2$ sous forme exponentielle

$$z_1 \cdot z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = \boxed{e^{i\frac{\pi}{12}}}$$ 0,5

$z_1 \cdot z_2$ sous forme trigonométrique :

$$z_1 \cdot z_2 = e^{i\frac{\pi}{12}} = \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$ 0,5

3°) D'une part :

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$$

et d'autre part :

$$z_1 \cdot z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires de $z_1 \cdot z_2$ dans ces deux écriture, on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{array}}$$ 1

5/6

Exercice 3

$f(x) = x\ln(x) - 3x$ définie sur $]0\,;+\infty[$

1°) limite en 0^+

on a $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ (admis)

$\lim\limits_{x\to 0^+} (3x) = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0}$ 1

limite en $+\infty$

$f(x) = x(\ln(x) - 3)$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x) - 3) = +\infty$

et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ 1

2°) $f(x) = x\ln(x) - 3x$

$f'(x) = 1.\ln(x) + x.\frac{1}{x} - 3 = \ln(x) + 1 - 3$

$\boxed{f'(x) = \ln(x) - 2}$ 1

3°) Les variations de $f(x)$ sont données par le signe de $f'(x)$.

$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow \ln(x) - 2 < 0$	$\Leftrightarrow \ln(x) - 2 = 0$
$\Leftrightarrow \ln(x) < 2$	$\Leftrightarrow \ln(x) = 2$
$\Leftrightarrow x < e^2$	$\Leftrightarrow x = e^2$

signe : 1

On en déduit les variations de $f(x)$.

1

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ 0	$\searrow$	$f(e^2)$	$\nearrow$	$+\infty$

$$
\begin{aligned}
f(e^2) &= e^2 \ln(e^2) - 3e^2 \\
&= e^2 \times 2 - 3e^2 \\
&= -e^2
\end{aligned}
$$