Classe: TSSI	Date: 12/09/2016	**Type**
Devoir n°1		**Devoir Maison** **à rendre le 19/09/2016**
Thème: Suites		

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$u_0=-1$, $u_1=\dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2}=u_{n+1}-\dfrac{1}{4}u_n$.

1°) Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2°) On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$v_n=u_{n+1}-\frac{1}{2}u_n .$$

a) Calculer v_0 .

b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .

c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

d) Exprimer v_n en fonction de n.

3°) On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n :

$$w_n=\frac{u_n}{v_n} .$$

a) Calculer w_0 .

b) En utilisant l'égalité $u_{n+1}=v_n+\dfrac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n .

c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1}=w_n+2$.

d) Exprimer w_n en fonction de n.

4°) Montrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n=\frac{2n-1}{2^n} .$$

5°) Pour tout entier naturel n, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{k=n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

a) Ecrire un algorithme en langage naturel qui permet de calculer S_n .

(En entrée on donne n, en sortie on veut S_n)

b) Programmer cet algorithme pour compléter, à 10^{-3} près, le tableau suivant :

n	0	1	2	10	11	12	13	14
S_n	-1							

c) Conjecturer un résultat sur le comportement de la suite S_n quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé du devoir

1°) $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = +\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ 1

$\left.\begin{array}{l} u_1 - u_0 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \\ u_2 - u_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{array}\right\}$ donc $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$

La suite n'est pas arithmétique 1

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{-1} = -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4} \times 2 = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$ donc $\dfrac{u_1}{u_0} \neq \dfrac{u_2}{u_1}$

La suite n'est pas géométrique 1

2°) $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

a) $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ 1

b) $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1}$ par définition de (v_n)

$= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1}$ car $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

$= \frac{1}{2}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$

$= \frac{1}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n\right)$

$= \frac{1}{2}v_n$ 2 car $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$

c) Comme $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$, la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ 1

d) On en déduit que :

$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$ donc $\boxed{v_n = \dfrac{1}{2^n}}$ 1

3°) $w_n = \frac{u_n}{v_n}$

a) $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = \frac{-1}{1} = -1$ (1)

b) $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = \frac{v_n}{\frac{1}{2}v_n} + \frac{\frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n}$ (2)

c) Donc $w_{n+1} = 2 + w_n$

$w_{n+1} = w_n + 2$ (1)

d) D'après ce qui précède (c), la suite (w_n) est arithmétique de raison 2.

Donc

$w_n = w_0 + nr$

$\boxed{w_n = -1 + 2n}$ (1)

4°) On sait que : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ par définition.

Donc $u_n = v_n . w_n = \frac{1}{2^n} \times (2n-1)$

$\boxed{u_n = \frac{2n-1}{2^n}}$ (2)

5°) a) $S_0 = u_0 = -1$

$S_1 = u_0 + u_1 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$S_2 = u_0 + u_1 + u_2 = -1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

L'algorithme en langage naturel

Lire n

$k = 0$; $S = 0$

Tant que $k \leq n$

  $u = (2k-1)/2^k$

  $S = S + u$

  $k = k+1$

Fin Tant que

Afficher S.

2

Sa traduction avec Algobox

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
  S EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE n
  k PREND_LA_VALEUR 0
  S PREND_LA_VALEUR 0
  TANT_QUE (k<=n) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    u PREND_LA_VALEUR (2*k-1)/pow(2,k)
    S PREND_LA_VALEUR S+u
    k PREND_LA_VALEUR k+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "n vaut "
  AFFICHER n
  AFFICHER "Sn vaut: "
  AFFICHER S
FIN_ALGORITHME
```

Les résultats

2

n	0	1	2	10	11	12	13	14
S_n	-1	-0,5	0,25	1,978	1,988	1,993	1,996	1,998

c) Il semble que la suite (S_n) tend vers 2.

1 **conjecture :** $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 2$