Classe: TSSI	Date: 16/09/2016	**Type** **Interrogation**
Devoir n°2 (sujet A)		
Thème: Suites		

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$

1°) Démontrer que (u_n) est croissante.

2°) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

3°) Démontrer par récurrence sur n que : $u_n = n(n+2)$

Classe: TSSI	Date: 16/09/2016	**Type** **Interrogation**
Devoir n°2 (sujet B)		
Thème: Suites		

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 4 \end{cases}$

1°) Démontrer que (u_n) est croissante.

2°) Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

3°) Démontrer par récurrence sur n que : $u_n = (n+1)(n+2)$

Sujet A : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$

1°) Pour montrer que (u_n) est croissante, nous allons montrer que $u_{n+1} - u_n \geq 0$

Nous avons :

$$u_{n+1} - u_n = u_n + 2n + 3 - u_n$$
$$= 2n + 3$$

(1)

Comme $n \geq 0$, $2n+3 \geq 0$ donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$

La suite (u_n) est croissante.

2°) $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 3 = \underline{3}$ (on a appliqué la définition de la suite en prenant $n=0$)

$u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 3 = 3 + 2 + 3 = \underline{8}$

(1,5)

$u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 3 = 8 + 4 + 3 = \underline{15}$

3°) * initialisation : pour $n = 0$, $n(n+2) = 0 \times 2 = 0 = u_0$

La formule est donc vraie pour $n = 0$.

* hérédité : hypothèse de récurrence $u_n = n(n+2)$ pour n fixé

On veut montrer qu'alors $u_{n+1} = (n+1)(n+3)$

Or on a : $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$ (par définition de (u_n))

(2,5)

$= n(n+2) + 2n + 3$ (d'après l'hypothèse de réc.)

$= n^2 + 2n + 2n + 3$

0,5 : pour l'initialisation

$= n^2 + 4n + 3$

1,5 : pour l'hérédité

Or $(n+1)(n+3) = n^2 + 3n + n + 3 = n^2 + 4n + 3$

0,5 : pour le plan

Ainsi $u_{n+1} = n^2 + 4n + 3 = (n+1)(n+3)$ <u>CQFD</u>

La propriété est donc héréditaire

* conclusion : La propriété est initialisée pour $n = 0$ et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

à savoir :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n+2)$

Sujet B : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 4 \end{cases}$

1°) Pour montrer que (u_n) est croissante, nous allons montrer que :
$$u_{n+1} - u_n \geq 0 .$$

Nous avons $u_{n+1} - u_n = \cancel{u_n} + 2n + 4 - \cancel{u_n}$
$= 2n + 4$

1

Comme $n \geq 0$, $2n + 4 \geq 0$ et donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
La suite (u_n) est donc croissante.

2°) $u_1 = u_0 + 2 \times 0 + 4 = 2 + 0 + 4 = \underline{6}$ (formule de définition avec $n = 0$)
$u_2 = u_1 + 2 \times 1 + 4 = 6 + 2 + 4 = \underline{12}$
$u_3 = u_2 + 2 \times 2 + 4 = 12 + 4 + 4 = \underline{20}$

1,5

3°) * initialisation : pour $n = 0$, $(n+1)(n+2) = 1 \times 2 = 2 = u_0$
La formule est donc vraie pour $n = 0$
* hérédité : hypothèse de récurrence : pour n fixé, $u_n = (n+1)(n+2)$
On veut montrer qu'alors $u_{n+1} = (n+2)(n+3)$
Nous avons : $u_{n+1} = u_n + 2n + 4$ (par définition de (u_n))
$= (n+1)(n+2) + 2n + 4$ (d'après l'hypothèse de réc.)
$= n^2 + 2n + n + 2 + 2n + 4$
$= n^2 + 5n + 6$

or $(n+2)(n+3) = n^2 + 3n + 2n + 6 = n^2 + 5n + 6$

2,5

Ainsi $u_{n+1} = n^2 + 5n + 6 = (n+2)(n+3)$ CQFD
La propriété est donc héréditaire.

0,5 : pour l'init
1,5 : pour l'hérédité
0,5 : plan

* conclusion : La propriété est initialisée pour $n = 0$ et est héréditaire, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ à savoir :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)(n+2)$