Classe: TSSI	Date: 21/09/2016	**Type**
Devoir n°3 (sujet A)		**Interrogation**
Thème: Récurrence et limite de suites		

Exercice 1

On donne la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 4$.

Exercice 2

Dans chacun des cas, déterminer la limite de la suite (u_n) .

a) $u_n = 3n - 5 + \frac{1}{n}$

b) $u_n = (1-2n)(n^2+3)$

c) $u_n = n^2 - 4n$

d) $u_n = \frac{1}{3n^2}(n^2+10)$

e) $u_n = \frac{-3n+2}{n^2+1}$

Correction du sujet A

Exercice 1 : Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.

- initialisation :

  $u_0 = 2$ donc $u_0 \leq 4$. La propriété est vraie pour $n=0$

- hérédité :

  hypothèse de récurrence : pour n fixé, $u_n \leq 4$

  On veut démontrer qu'alors $u_{n+1} \leq 4$

  On a : $u_n \leq 4$ d'après l'hypothèse de récurrence

  $\Rightarrow \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{2} \times 4$

  $\Rightarrow \frac{1}{2}u_n + 2 \leq 2 + 2$

  c.à.d : $u_{n+1} \leq 4$

  La propriété est donc héréditaire

- Conclusion : La propriété est initialisée pour $n=0$ et elle est héréditaire, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $u_n \leq 4$

Exercice 2 :

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} (3n) = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty}\left(3n - 5 + \frac{1}{n}\right) = +\infty}$

(par somme)

b) $u_n = (1-2n)(n^2+3)$

on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty}(1-2n) = -\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty}(n^2+3) = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n) = -\infty}$

(par produit)

c) $u_n = n^2 - 4n = n^2\left(1 - \frac{4}{n}\right)$

on a $\lim\limits_{n \to +\infty}(n^2) = +\infty$

$\lim\limits_{n \to +\infty}\left(1 - \frac{4}{n}\right) = 1 - 0 = 1$

donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty}(u_n) = +\infty}$

(par produit)

d) $u_n = \frac{1}{3n^2}(n^2+10) = \frac{n^2}{3n^2} + \frac{10}{3n^2} = \frac{1}{3} + \frac{10}{3n^2}$

on a : $\lim_{n\to+\infty}(3n^2) = +\infty$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{10}{3n^2}\right) = 0$

on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \frac{1}{3}+0 = \frac{1}{3}}$ (par somme)

e) $u_n = \frac{-3n+2}{n^2+1} = \frac{-3n\left(1-\frac{2}{3n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{-3\left(1-\frac{2}{3n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$

on a :

$\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{3n}\right) = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} -3\left(1-\frac{2}{3n}\right) = -3$

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} n\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = +\infty$

donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n) = 0}$
(par quotient)

barème: Exercice 1 : 3 pts
- plan : 0,5 pt
- initialisation : 0,5 pt
- hérédité : 2 pts

Exercice 2 : 5 pts (chaque limite correctement rédigée : 1 pt)

Classe: TSSI	Date: 21/09/2016	**Type** **Interrogation**
Devoir n°3 (sujet B)		
Thème: Récurrence et limite de suites		

Exercice 1

On donne la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 3$.

Exercice 2

Dans chacun des cas, déterminer la limite de la suite (u_n).

a) $u_n = 2n + 5 - \frac{1}{n}$

b) $u_n = (3-n)(n^2+1)$

c) $u_n = n^2 - 5n$

d) $u_n = \frac{1}{2n^2}(n^2+8)$

e) $u_n = \frac{-2n+1}{n^2+1}$

Correction sujet B

Exercice 1 : Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 3$.

- initialisation :

  $u_0 = 2$ donc $u_0 \leq 3$. La propriété est vraie pour $n=0$

- hérédité :

  hypothèse de récurrence : pour n fixé, $u_n \leq 3$

  On veut démontrer que sous cette hypothèse : $u_{n+1} \leq 3$

  On a : $u_n \leq 3$ d'après l'hypothèse de récurrence

  $$\Rightarrow \frac{1}{3}u_n \leq \frac{1}{3}\times 3$$

  $$\Rightarrow \frac{1}{3}u_n \leq 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{3}u_n + 2 \leq 1+2$$

  c.à.d : $u_{n+1} \leq 3$ CQFD

  La propriété est héréditaire

- conclusion : La propriété est initialisée pour $n=0$ et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout n, à savoir : pour tout n, $u_n \leq 3$

Exercice 2

a) $u_n = 2n + 5 - \frac{1}{n}$

on a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}(2n) = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0\end{array}\right\}$ $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$ (par somme)

b) $u_n = (3-n)(n^2+1)$

on a :

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}(3-n) = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty}(n^2+1) = +\infty\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = -\infty$ (par produit)

c) $u_n = n^2 - 5n = n^2\left(1-\frac{5}{n}\right)$

on a : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right) = 1-0 = 1\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$ (produit)

d) $u_n = \frac{1}{2n^2}(n^2+8) = \frac{n^2}{2n^2} + \frac{8}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{n^2}$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{4}{n^2}\right) = 0$ donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (u_n) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}}$

e) $u_n = \frac{-2n+1}{n^2+1} = \frac{-2n\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{-2\left(1-\frac{1}{2n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{n \to +\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right) = 1 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} -2\left(1-\frac{1}{2n}\right) = -2 \\ \lim_{n \to +\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = 1 \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} n\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = +\infty \end{array}\right\}$ donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} (u_n) = 0}$

(par quotient)

<u>barème:</u> idem au sujet A