TSSI : Devoir n°4 (à rendre le 3/10/2016)

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n, par la relation $u_{n+1} = au_n + b$ (a et b réels non nuls tels que $a \neq 1$).

On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$.

1. Démontrer que, la suite (v_n) est géométrique de raison a.
2. En déduire que si a appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, alors la suite (u_n) a pour limite $\dfrac{b}{1-a}$.

Partie B

En mars 2015, Max achète une plante verte mesurant 80 cm. On lui conseille de la tailler tous les ans, au mois de mars, en coupant un quart de sa hauteur. La plante poussera alors de 30 cm au cours des douze mois suivants.

Dès qu'il rentre chez lui, Max taille sa plante.

1. Quelle sera la hauteur de la plante en mars 2016 avant que Max ne la taille ?
2. Pour tout entier naturel n, on note h_n la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015 + n)$.
   a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $h_{n+1} = 0{,}75h_n + 30$.
   b. Conjecturer à l'aide de la calculatrice le sens de variations de la suite (h_n).
   Démontrer cette conjecture (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).
   c. La suite (h_n) est-elle convergente ? Justifier la réponse.

Correction du devoir

Partie A (8 points)

$u_{n+1} = a.u_n + b \qquad (a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R} \text{ et } a \neq 1)$

1°) On a $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a} \qquad \left(\text{donc } u_n = v_n + \dfrac{b}{1-a} \quad (R_2)\right)$

Donc :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{b}{1-a} \\
&= a.u_n + b - \frac{b}{1-a} \qquad \text{car } u_{n+1} = a\,u_n + b \\
&= a\left(v_n + \frac{b}{1-a}\right) + b - \frac{b}{1-a} \qquad \text{d'après la relation } (R_2) \\
&= a\,v_n + \frac{ab}{1-a} + \frac{b(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a} \\
&= a\,v_n + \underbrace{\frac{\cancel{ab} + \cancel{b} - \cancel{ba} - \cancel{b}}{1-a}}_{=0} \\
&= a\,v_n .
\end{aligned}$$

4 D'où $v_{n+1} = a\,v_n$, donc (v_n) est géométrique de raison a.

2°) Comme (v_n) est géométrique de raison a : $v_n = v_0 . a^n$
avec $v_0 = u_0 - \dfrac{b}{1-a}$ (c'est un réel)

D'après (R_2), on a déduit : $u_n = v_0\,a^n + \dfrac{b}{1-a}$

si $a \in]-1;1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(a^n) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_0\,a^n) = 0$

4 ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 + \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{b}{1-a}}$

CQFD

- <u>pour $n=0$</u> : On a vu que : $h_0 = 80$ et $h_1 = 90$
  Donc $h_1 \geqslant h_0$
  La propriété est vraie pour $n=0$.
- <u>hypothèse de récurrence</u> : pour n fixé, $h_{n+1} \geqslant h_n$
  <u>On va démontrer que sous cette hypothèse : $h_{n+2} \geqslant h_{n+1}$</u>
  D'après l'hypothèse de récurrence :

$$h_{n+1} \geqslant h_n$$
$$\Rightarrow 0{,}75 h_{n+1} \geqslant 0{,}75 h_n$$
$$\Rightarrow 0{,}75 h_{n+1} + 30 \geqslant 0{,}75 h_n + 30$$
$$\Rightarrow h_{n+2} \geqslant h_{n+1} \quad \text{(par définition de } h_n\text{)}$$

<u>CQFD</u>

La propriété est donc héréditaire.
- <u>conclusion</u> : La propriété (ici c'est une inégalité) est vraie pour $n=0$ et elle est héréditaire. D'après le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, à savoir : $h_{n+1} \geqslant h_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

4 { 1 : plan
1 : initialisation
2 : hérédité

<u>Cela montre que la suite (h_n) est croissante.</u>

c) La suite (h_n) vérifie : $h_{n+1} = 0{,}75 h_n + 30$
Elle est donc de la forme : $h_{n+1} = a h_n + b$ avec $a = 0{,}75$ et $b = 30$. Comme $a \in]-1;1[$, la suite (h_n) converge vers $\frac{b}{1-a}$ (d'après la partie A).

2

$$\boxed{\text{Donc } (h_n) \text{ converge vers } \frac{30}{1-0{,}75} = \frac{30}{0{,}25} = 120.}$$

Partie B

(12 points)

1. Max rentre chez lui avec la plante qui mesure 80 cm, il coupe alors le quart de sa hauteur, c'est à dire qu'il enlève 20 cm. Elle mesure alors 60 cm. Comme elle poussera de 30 cm, la hauteur de la plante sera de 90 cm en Mars 2016 avant qu'il ne la taille.

(2)

2. D'après la définition de (h_n) : $h_0 = 80$; $h_1 = 90$

a) h_n est la hauteur de la plante, avant sa taille, en mars de l'année $(2015+n)$, puis :

- Il la taille en enlevant $\frac{1}{4}$ de sa hauteur, elle aura donc comme hauteur $0,75\,h_n$ (diminuer de 25% revient à multiplier par 0,75)
- Durant les 12 mois suivants, elle repousse de 30 cm, sa taille sera donc : $0,75\,h_n + 30$ avant la taille de l'année $2015+n+1$.

Donc

$$\boxed{h_{n+1} = 0,75\,h_n + 30}$$

(2)

b) A l'aide de la calculatrice j'obtiens le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6
h_n	80	90	97,5	103,13	107,34	110,51	112,88

Il semble que la suite (h_n) soit croissante.

(2)

(Ceci est la conjecture)

Démontrons par récurrence que $h_{n+1} \geqslant h_n$ pour tout n

(cela prouvera que la suite (h_n) est croissante)