Nom-Prénom :

Classe: TSSI	Date: 11/10/2016	**Type**
Devoir n°5 (sujet A)		**Devoir surveillé**
Thème: Suites		

Exercice 1 : Démonstration par récurrence (5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=2(u_n+2^n)$.

1°) Calculer u_1 et u_2.

2°) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=n2^n$.

Exercice 2 : QCM (5 points)

Indiquez, pour chacune des affirmations, si elles sont vraies ou fausses (On pourra entourer ou barrer). Comptez 0,5 point par bonne réponse, retirez 0,25 point par mauvaise réponse. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Si une suite (u_n) est croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.	VRAI	FAUX
Si une suite est décroissante et minorée par 0, alors elle converge vers 0.	VRAI	FAUX
La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n^2+3$ est une suite géométrique.	VRAI	FAUX
La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=2n+3$ est une suite arithmétique.	VRAI	FAUX
Si pour tout $n\geqslant 100$, $u_n\leqslant 5$, alors la suite u_n est majorée.	VRAI	FAUX
Une suite bornée est convergente	VRAI	FAUX

Dans le tableau suivant, (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{-2}{u_n}$.

Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.	VRAI	FAUX
Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.	VRAI	FAUX
Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.	VRAI	FAUX
Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.	VRAI	FAUX

Exercice 3 : Limites (6 points)

1°) Déterminer la limites des suites suivantes en utilisant les théorèmes généraux :

- $u_n = 3 + \frac{4}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.
- $v_n = 3n^2 - n \quad (n \in \mathbb{N})$.
- $w_n = \frac{7n^3+3}{4n^2+1} \quad (n \in \mathbb{N})$.

2°) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \frac{-7}{4n + n.\cos(n) + 1}$

a) Enoncer le théorème des gendarmes.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\frac{7}{3n+1} \leqslant u_n \leqslant -\frac{7}{5n+1}$$

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 : (4 points)

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 \end{cases}$

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2°) On pose : $v_n = u_n - \frac{3}{2}$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

3°) En déduire l'expression de (v_n) en fonction de n, puis celle de (u_n).

Nom-Prénom :

Classe: TSSI	Date: 11/10/2016	**Type**
Devoir n°5 (sujet B)		**Devoir surveillé**
Thème: Suites		

Exercice 1 : Démonstration par récurrence (5 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=2(u_n+2^n)$.

1°) Calculer u_1 et u_2.

2°) Démontrer, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=n2^n$.

Exercice 2 : QCM (5 points)

Indiquez, pour chacune des affirmations, si elles sont vraies ou fausses (On pourra entourer ou barrer). Comptez 0,5 point par bonne réponse, retirez 0,25 point par mauvaise réponse. L'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=n^2+3$ est une suite géométrique.	VRAI	FAUX
La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=2n+3$ est une suite arithmétique.	VRAI	FAUX
Si une suite (u_n) est croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.	VRAI	FAUX
Si une suite est décroissante et minorée par 0, alors elle converge vers 0.	VRAI	FAUX
Si pour tout $n\geqslant 100$, $u_n\leqslant 5$, alors la suite u_n est majorée.	VRAI	FAUX
Une suite bornée est convergente	VRAI	FAUX

Dans le tableau suivant, (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{-2}{u_n}$.

Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.	VRAI	FAUX
Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.	VRAI	FAUX
Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.	VRAI	FAUX
Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.	VRAI	FAUX

Exercice 3 : Limites (6 points)

1°) Déterminer la limites des suites suivantes en utilisant les théorèmes généraux :

- $u_n = 2 + \frac{3}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.
- $v_n = 2n^2 - n$ $(n \in \mathbb{N})$.
- $w_n = \frac{4n^3 - 3}{7n^2 + 1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

2°) Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \frac{-5}{3n + n.\cos(n) + 2}$

a) Enoncer le théorème des gendarmes.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\frac{5}{2n+2} \leqslant u_n \leqslant -\frac{5}{4n+2}$$

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 : (4 points)

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 1 \end{cases}$

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3.

2°) On pose : $v_n = u_n - \frac{3}{2}$.

Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

3°) En déduire l'expression de (v_n) en fonction de n, puis celle de (u_n).

Correction Sujet A

Exercice 1 : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2(u_n + 2^n)$

(5 points)

1°) $u_1 = 2(u_0 + 2^0) = 2 \times 1 = 2$
$u_2 = 2(u_1 + 2^1) = 2 \times 4 = 8$) 1 pt

• plan et rédaction générale : 1 pt
• initialisation : 1 pt
• hérédité : 2 pt

2°) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n\,2^n$

• pour $n = 0$: $0 \times 2^0 = 0 = u_0$
La formule est donc vraie pour $n = 0$

•• hypothèse de récurrence : pour n fixé, $u_n = n\,2^n$
Dans ce cas : $u_{n+1} = 2(u_n + 2^n)$ par définition de (u_n)
$= 2(n2^n + 2^n)$ d'après l'hyp. de réc.
$= 2(n+1)2^n$
$u_{n+1} = (n+1).2^{n+1}$
ce qui est la formule au rang $n+1$

La propriété est donc héréditaire.

••• conclusion : La formule est vraie pour $n = 0$ et la propriété est héréditaire. D'après le principe de récurrence, on peut affirmer que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\,2^n$

Exercice 2

(5 pts)

Q_1	Si une suite (u_n) est croissante, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.	~~VRAI~~	FAUX
Q_2	Si une suite est décroissante et minorée par 0, alors elle converge vers 0.	~~VRAI~~	FAUX
Q_3	La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 3$ est une suite géométrique.	~~VRAI~~	FAUX
Q_4	La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 3$ est une suite arithmétique.	VRAI	~~FAUX~~
Q_5	Si pour tout $n \geqslant 100$, $u_n \leqslant 5$, alors la suite u_n est majorée.	VRAI	~~FAUX~~
Q_6	Une suite bornée est convergente	~~VRAI~~	FAUX

Dans le tableau suivant, (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Q_7	Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.	~~VRAI~~	FAUX
Q_8	Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.	VRAI	~~FAUX~~
Q_9	Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.	~~VRAI~~	FAUX
Q_{10}	Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.	VRAI	FAUX

Explications (non demandée dans la rédaction)

$\boxed{Q_1 : \text{FAUX}}$ On peut avoir une suite croissante qui tend vers 2, par exemple : $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ est croissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ et $\lim(u_n) = 2$

$\boxed{Q_2 : \text{FAUX}}$ On peut avoir une suite décroissante qui tend vers 1, dans ce cas elle est aussi minorée par 0, mais ne converge pas vers 0.

$\boxed{Q_3 : \text{FAUX}}$ $u_0 = 3$, $u_1 = 4$, $u_2 = 7$

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{4}{3} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{4}$ donc elle n'est pas géométrique.

$\boxed{Q_4 : \text{VRAI}}$ $u_n = 2n + 3 = r \times n + u_0$ avec $u_0 = 3$ et $r = 2$

$\boxed{Q_5 : \text{VRAI}}$ on note $M = \max(u_0, u_1, \dots, u_{99}, 5)$ dans ce cas, (u_n) est majorée par M.

$\boxed{Q_6 : \text{FAUX}}$ par exemple $u_n = (-1)^n$ est bornée car $-1 \leq u_n \leq 1$ et pourtant elle ne converge pas

$\boxed{Q_7 : \text{FAUX}}$ Si (u_n) converge vers 0 (en étant jamais nul) par exemple $u_n = \frac{1}{n}$, dans ce cas $v_n = -2n$ qui tend vers $-\infty$, donc diverge.

$\boxed{Q_8 : \text{VRAI}}$ si (u_n) est minorée par 2

alors pour tout n, $2 \leq u_n$

donc $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n}$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ décroissante sur $]0;+\infty[$

donc $-2\times\left(\frac{1}{2}\right) \leq -2\times\frac{1}{u_n}$ (on multiplie par -2)

donc $\underline{-1 \leq v_n}$ pour tout n

cela signifie (v_n) minorée par -1

$\boxed{Q_9 : \text{FAUX}}$ si $u_0 = 2$; $u_1 = 1$ (décroissante au début)

alors $v_0 = -1$ et $v_1 = -2$ (décroissante au début)

$\boxed{Q_{10} : \text{FAUX}}$ si on prend $u_n = (-1)^n$ ((u_n) diverge)

dans ce cas : $v_n = \frac{-2}{(-1)^n} = -2\times(-1)^n = \begin{cases} -2 & \text{si } n \text{ pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

(v_n) diverge. (elle ne converge pas vers 0)

Exercice 3

1°) • $u_n = 3 + \frac{4}{n}$

0,5pt

on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{n}\right) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 3}$

• $v_n = 3n^2 - n = n^2\left(3 - \frac{1}{n}\right)$

1pt

or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2) = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = +\infty}$

• $w_n = \frac{7n^3+3}{4n^2+1} = \frac{n^3\left(7+\frac{3}{n^3}\right)}{n^2\left(4+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{n\left(7+\frac{3}{n^3}\right)}{\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}$

1 on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(7+\frac{3}{n^3}\right) = 7$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4+\frac{1}{n^2}\right) = 4$ } donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = +\infty}$

2°) a) Soit trois suites (u_n) (v_n) et (w_n) qui vérifient l'inégalité :

$$v_n \leq u_n \leq w_n \quad \text{(au moins à partir d'un certain rang)}$$

1 si (v_n) et (w_n) convergent toutes les deux vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors (u_n) converge vers ℓ.

b) Nous savons : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

donc $-n \leq n\cos(n) \leq n$ (on a multiplié par $n \geq 1$)

donc $4n - n \leq 4n + n\cos(n) \leq 4n + n$ (on a ajouté $4n$)

c.à.d. $3n \leq 4n + n\cos(n) \leq 5n$

donc $3n + 1 \leq 4n + n\cos(n) + 1 \leq 5n + 1$

ainsi $\dfrac{1}{3n+1} \geq \dfrac{1}{4n+n\cos(n)+1} \geq \dfrac{1}{5n+1}$

(car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$.

1,5 donc $-\dfrac{7}{3n+1} \leq u_n \leq -\dfrac{7}{5n+1}$

(on a multiplié par -7)

Cette inégalité est donc démontrée pour $n \in \mathbb{N}^*$, mais on voit qu'elle est vraie pour $n = 0$ car $u_0 = -7$ donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n+1)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(5n+1)=+\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{7}{3n+1}\right)=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{7}{5n+1}\right)=0$

1pt

Ainsi, vue l'inégalité démontrée en b et d'après le théorème des gendarmes on peut en déduire que (u_n) converge et que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_n)=0}$$

Exercice 4

1°) $u_0=1$ $u_1=\frac{1}{3}u_0+1=\frac{1}{3}+1=\boxed{\frac{4}{3}}$ $u_2=\frac{1}{3}u_1+1=\frac{1}{3}\times\frac{4}{3}+1=\boxed{\frac{13}{9}}$

1pt

$u_3=\frac{1}{3}\times\frac{13}{9}+1=\frac{13}{27}+\frac{27}{27}=\boxed{\frac{40}{27}}$

2°) $v_n=u_n-\frac{3}{2}$ (donc $u_n=v_n+\frac{3}{2}$)

donc $v_{n+1}=u_{n+1}-\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{3}u_n+1-\frac{3}{2}$ (par définition de (u_n))

$=\frac{1}{3}\left(v_n+\frac{3}{2}\right)+1-\frac{3}{2}$ car $u_n=v_n+\frac{3}{2}$

2pts

$=\frac{1}{3}v_n+\frac{1}{2}+1-\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{3}v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

3°) $v_0=u_0-\frac{3}{2}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$.

Comme (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$: $\boxed{v_n=v_0\left(\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^n}}$

ainsi, $u_n=v_n+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^n}+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3^n}+3\right)$

1pt

$$\boxed{u_n=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3^n}\right)}$$

Correction Sujet B

Exercice 1 : Voir correction sujet A (même énoncé)

Exercice 2 :

Q3	La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 3$ est une suite géométrique.	~~VRAI~~	FAUX
Q4	La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n + 3$ est une suite arithmétique.	VRAI	~~FAUX~~
Q1	Si une suite (u_n) est croissante, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.	~~VRAI~~	FAUX
Q2	Si une suite est décroissante et minorée par 0, alors elle converge vers 0.	~~VRAI~~	FAUX
Q5	Si pour tout $n \geqslant 100$, $u_n \leqslant 5$, alors la suite u_n est majorée.	VRAI	~~FAUX~~
Q6	Une suite bornée est convergente	~~VRAI~~	FAUX

Dans le tableau suivant, (u_n) est une suite définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.

Q7	Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.	VRAI	FAUX
Q9	Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.	~~VRAI~~	FAUX
Q8	Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1.	VRAI	~~FAUX~~
Q10	Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.	~~VRAI~~	FAUX

Pour les explications, voir correction du sujet A (ce sont les mêmes questions, dans un autre ordre (le numéro de la question est en vert devant la ligne)

Exercice 3 :

1°) • $u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$

0,5 $\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{n}\right) = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 2}$

- $v_n = 2n^2 - n = n^2\left(2 - \frac{1}{n}\right)$

1pt

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right) = 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n^2) = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = +\infty}$

- $w_n = \dfrac{4n^3-3}{7n^2+1} = \dfrac{n^3\left(4-\frac{3}{n^3}\right)}{n^2\left(7+\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{n\left(4-\frac{3}{n^3}\right)}{7+\frac{1}{n^2}}$

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}(n) = +\infty$

1pt

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(4-\frac{3}{n^3}\right) = 4$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(7+\frac{1}{n^2}\right) = 7$

donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(w_n) = +\infty}$

2°) a) Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites qui vérifient :

$v_n \leq u_n \leq w_n$ (à partir d'un certain rang.

1pt

Si (v_n) et (w_n) convergent toutes les deux vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$

alors (u_n) converge vers ℓ.

b) on a : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

on a multiplié par $n \geq 1$

$\Rightarrow -n \leq n\cos(n) \leq n$

on a ajouté $3n$

$\Rightarrow 3n - n \leq 3n + n\cos(n) \leq 3n + n$

on a ajouté 2

$\Rightarrow 2n + 2 \leq 3n + n\cos(n) + 2 \leq 4n + 2$

on prend l'inverse qui est une fonction décroissante sur $]0;+\infty[$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2n+2} \geq \dfrac{1}{3n+n\cos(n)+2} \geq \dfrac{1}{4n+2}$

on a multiplié par -5.

1,5 pts

$$\Rightarrow \frac{-5}{2m+2} \leq \frac{-5}{3m+m\cos(m)+2} \leq \frac{-5}{4m+2}$$

CQFD

(pour $m=0$ je ne l'ai pas démontré, mais on vérifie que pour $m=0$ l'inégalité est vraie aussi)

c) On a $-\frac{5}{2n+2} \leq u_n \leq -\frac{5}{4n+2}$ (voir b)

1pt

or $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+2)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{5}{2n+2}\right)=0$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}(4n+2)=+\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{5}{4n+2}\right)=0$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n)=0$$

<u>Exercice 4</u>. voir correction sujet A (même énoncé)