Classe: TSSI	Date: 4/11/2014	**Type**
Devoir n°6A		**Interrogation**
Thème: Calcul nombres complexes		

Exercice 1 :

Mettre sous forme algébrique, en détaillant le calcul, le nombre suivant :

$$z_0=\frac{2+5i}{3-4i}$$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $2z+3i+2=iz-1$

b) $2iz-1+3i=(1-3i)z+6$

c) $z+2i\bar{z}=3+i$

d) $z^2-4z+5=0$

e) $z^2=z-1$

Exercice 3 :

On donne $Z=\frac{z+2}{z+3i}$

On pose $z=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$.

Déterminer, en fonction de x et y, la partie réelle et imaginaire de Z.

Classe: TSSI	Date: 4/11/2014	**Type**
Devoir n°6B		**Interrogation**
Thème: Calcul nombres complexes		

Exercice 1 :

Mettre sous forme algébrique, en détaillant le calcul, le nombre suivant :

$$z_0 = \frac{3+6i}{1-2i}$$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $3z+2i+1=iz+2$

b) $4iz-1+4i=(1+2i)z+5$

c) $\bar{z}-2iz=3-i$

d) $z^2+4z+5=0$

e) $z^2=z-1$

Exercice 3 :

On donne $Z=\dfrac{z+1}{z+2i}$

On pose $z=x+iy$ avec $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$.

Déterminer, en fonction de x et y, la partie réelle et imaginaire de Z.

Correction sujet A

Exercice 1 :

$$z_0 = \frac{2+5i}{3-4i} = \frac{(2+5i)(3+4i)}{9+16} = \frac{6+8i+15i-20}{25}$$

(2pts)

$$z_0 = \frac{-14+23i}{25}$$

$$\boxed{z_0 = -\frac{14}{25} + \frac{23}{25}i}$$

Exercice 2 :

a) $2z + 3i + 2 = iz - 1$

$\Leftrightarrow \quad 2z - iz = -1 - 3i - 2$

$\Leftrightarrow \quad (2-i)z = -3-3i$

$\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{-3-3i}{2-i}$

$\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{(-3-3i)(2+i)}{4+1}$

$\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{-6-3i-6i+3}{5}$

(2pts)

$\Leftrightarrow \quad \boxed{z = -\dfrac{3}{5} - \dfrac{9}{5}i}$

b) $2iz - 1 + 3i = (1-3i)z + 6$

$\Leftrightarrow \quad 2iz - (1-3i)z = 6 + 1 - 3i$

$\Leftrightarrow \quad (-1+5i)z = 7 - 3i$

$\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{7-3i}{-1+5i}$

$\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{(7-3i)(-1-5i)}{1+25}$

$\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{-7-35i+3i-15}{26}$

(3pts)

$\Leftrightarrow \quad z = -\dfrac{22}{26} - \dfrac{32}{26}i \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{z = -\dfrac{11}{13} - \dfrac{16}{13}i}$

c) Ici, on pose $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

L'équation s'écrit:

$$(x+iy) + 2i(x-iy) = 3+i$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 2y + i(y+2x) = 3 + i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2(3-2y) + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 6 - 4y + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ -3y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2\times\frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9-10}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$$

(3 pts) conclusion : $\boxed{z = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3}i}$ est l'unique solution

d) $z^2 - 4z + 5 = 0$

C'est une équation de degré 2.

$\Delta = 16 - 4\times5 = 16 - 20 = -4$

Il y a donc deux solutions complexes conjuguées:

(2 pts)

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= \frac{4 - i.\sqrt{4}}{2} = \frac{4-2i}{2} = 2 - i \\ z_2 &= 2 + i \end{aligned}}$$

e) $z^2 = z - 1 \Leftrightarrow z^2 - z + 1 = 0$

C'est une équation de degré 2.

$\Delta = 1 - 4 = -3$

(2 pts) Il y a donc deux racines complexes conjuguées

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \\ z_2 &= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}}$$

3/6

Exercice 3
(6pts)

$$Z = \frac{z+2}{z+3i} = \frac{x+iy+2}{x+iy+3i}$$

$$Z = \frac{(x+2)+iy}{x+i(y+3)} = \frac{\left[(x+2)+iy\right]\left[x-i(y+3)\right]}{x^2+(y+3)^2}$$

$$Z = \frac{x(x+2)+y(y+3)+i\left(yx-(x+2)(y+3)\right)}{x^2+(y+3)^2}$$

On a donc :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}(Z) &= \frac{x(x+2)+y(y+3)}{x^2+(y+3)^2} = \frac{x^2+2x+y^2+3y}{x^2+(y+3)^2} \\ \mathrm{Im}(Z) &= \frac{yx-(x+2)(y+3)}{x^2+(y+3)^2} = \frac{yx-xy-3x-2y-6}{x^2+(y+3)^2} = \frac{-3x-2y-6}{x^2+(y+3)^2} \end{aligned}}$$

Correction sujet B

Exercice 1 : (2 pts)

$$z_0 = \frac{3+6i}{1-2i} = \frac{(3+6i)(1+2i)}{1^2+2^2} = \frac{3+6i+6i-12}{1+4}$$

$$z_0 = \frac{-9+12i}{5}$$

$$\boxed{z_0 = -\frac{9}{5} + \frac{12}{5}i}$$

Exercice 2 :

a) $3z + 2i + 1 = iz + 2$

$\Leftrightarrow 3z - iz = 2 - 2i - 1$

$\Leftrightarrow (3-i)z = 1 - 2i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{1-2i}{3-i}$ ← 1pt

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(1-2i)(3+i)}{9+1}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{3+i-6i+2}{10}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{5-5i}{10}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{5}{10} - \dfrac{5}{10}i \Leftrightarrow \boxed{z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i}$ (2pts)

b) $4iz - 1 + 4i = (1+2i)z + 5$

$\Leftrightarrow 4iz - (1+2i)z = 5 + 1 - 4i$

$\Leftrightarrow (4i - 1 - 2i)z = 6 - 4i$

$\Leftrightarrow (-1+2i)z = 6 - 4i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{6-4i}{-1+2i}$ ← 1,5 pts

$\Leftrightarrow z = \dfrac{(6-4i)(-1-2i)}{1+4}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{-6-12i+4i-8}{5} \Leftrightarrow \boxed{z = -\dfrac{14}{5} - \dfrac{8}{5}i}$ (3 pts)

c) On pose $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

L'équation s'écrit :

$$x - iy - 2i(x+iy) = 3 - i$$

$$\Leftrightarrow \quad x - iy - 2ix + 2y = 3 - i$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 2y - i(2x+y) = 3 - i$$

1,5 → $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ (identification des parties réelles et imaginaires)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 2(3-2y) + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ 6 - 4y + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2y \\ -3y = -5 \end{cases}$$

1 → $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2 \times \frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9-10}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$

<u>conclusion :</u> L'équation a une seule solution :

concl : 0,5 $\boxed{z = -\frac{1}{3} + \frac{5}{3}i}$ (3 pts)

d) $z^2 + 4z + 5 = 0$

0,5 → C'est une équation de degré 2 avec $\Delta = 16 - 4 \times 5 = -4$

Il y a donc deux solutions complexes conjuguées

(2 pts) $z_1 = \frac{-4-2i}{2} = \boxed{-2-i}$ et $z_2 = \boxed{-2+i}$

e) Voir sujet A

Exercice 3 :

$$z = \frac{z+1}{z+2i} = \frac{x+iy+1}{x+iy+2i}$$

$$z = \frac{(x+1)+iy}{x+i(y+2)} = \frac{[(x+1)+iy][x-i(y+2)]}{x^2+(y+2)^2}$$

2 pts pour dénom. correct.

$$z = \frac{x(x+1)+y(y+2)+i(yx-(x+1)(y+2))}{x^2+(y+2)^2}$$

$$z = \frac{x(x+1)+y(y+2)}{x^2+(y+2)^2} + i\,\frac{-2x-y-2}{x^2+(y+2)^2}$$

3pts

Donc

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{x(x+1)+y(y+2)}{x^2+(y+2)^2} = \frac{x^2+x+y^2+2y}{x^2+(y+2)^2}$$

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{-2x-y-2}{x^2+(y+2)^2}$$

1 pt