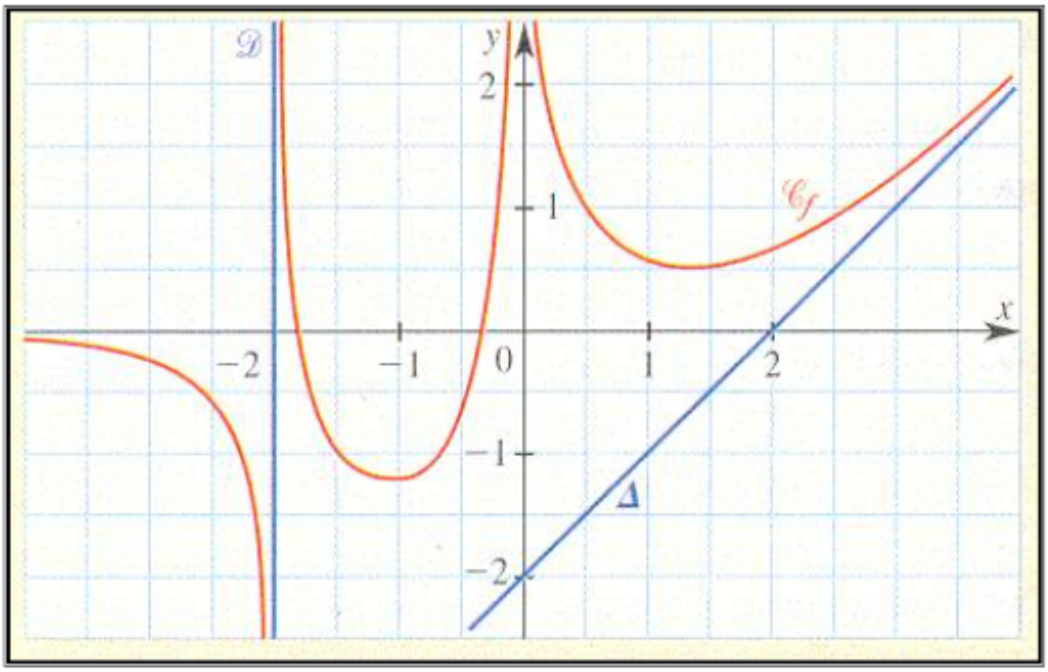
# Devoir n°7: Limites de fonctions

## Exercice 1 : Lectures graphiques

On a tracé ci-dessous la courbe représentative d'un fonction f.




1°) Déterminer graphiquement le domaine de définition $D_f$ de la fonction f.

2°) Déterminer graphiquement les limites de f aux bornes de $D_f$.

3°) Déterminer graphiquement les asymptotes à $\mathcal{C}_f$ en donnant leurs équations.

## Exercice 2 : Rédaction d'une limite et interprétation géométrique.

Déterminer les limites suivantes (on demande une rédaction claire) et interpréter graphiquement le résultat s'il y a lieu.

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\dfrac{3}{x}$.　　2°) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} 2x+\dfrac{3}{x}$　　2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{5x+2}$.

3°) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3-3x^2-1$.　　4°) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-3x+1}{x-2}$　　5°) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{2x^2-3x+1}{x-2}$.

## Exercice 3:Théorèmes de comparaison

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$. On sait que pour tout $x\neq 0$, $\dfrac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 3$.

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$.　　b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{f(x)}$.

Correction du devoir

## Exercice 1 : Lectures graphiques

1pt 1°) Le domaine de définition $D_f$ est : $D_f = ]-\infty ; -2[ \cup ]-2 ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$

2°) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

3pts $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ $\qquad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$

3°) La courbe $\mathcal{C}_f$ admet 4 asymptotes :

- L'axe des abscisses d'équation $\boxed{y = 0}$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- La droite d'équation $\boxed{x = -2}$ car $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$
- La droite d'équation $\boxed{x = 0}$ car $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$
- Une asymptote oblique d'équation $\boxed{y = x - 2}$

2pts

## Exercice 2 :

1°) on a

1pt

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} (2x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3}{x}\right) = 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} \left(2x + \frac{3}{x}\right) = +\infty$$

2°) On a : $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} (2x) = 0$ ; $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(\frac{3}{x}\right) = -\infty$ donc $\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \left(2x + \frac{3}{x}\right) = -\infty}$

1pt

La droite d'équation $x=0$ est asymptote

3°) On a : $\lim_{x \to +\infty} (5x+2) = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{5x+2}\right) = 0}$

1pt

La droite d'équation $y=0$ est asymptote

4°) $2x^3 - 3x^2 - 1 = 2x^3\left(1 - \frac{3x^2}{2x^3} - \frac{1}{2x^3}\right) = 2x^3\left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^3}\right)$

on sait que : $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3}{2x}\right) = 0$ ; $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2x^3}\right) = 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^3}\right) = 1$

2pts

ainsi $\boxed{\lim_{x \to +\infty} (2x^3 - 3x^2 - 1) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3\left(1 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x^3}\right) = \lim_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty}$

5°) $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2} = \frac{2x^2\left(1 - \frac{3x}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{2x\left(1 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right)}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)}$

a $\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{3}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right) = 1 - 0 + 0 = 1$

$\lim_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1 - 0 = 1$

$\lim_{x \to -\infty} (2x) = -\infty$

donc $\boxed{\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2}\right) = -\infty}$

2pts

6°) $\lim_{x \to 2} (2x^2 - 3x + 1) = 8 - 6 + 1 = 3$ ; $\lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} (x - 2) = 0^+$ donc $\boxed{\lim_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \left(\frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 2}\right) = +\infty}$

2pts

La droite d'équation $(x=2)$ est asymptote

## Exercice 3 :

a) On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

On sait que si $x \neq 0$ $\quad \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 3$

donc si $x \neq 0$ : $\quad \frac{1}{2x^2} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{3}{x^2}$ $\quad$ (car $x^2 > 0$)

2,5 pts

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2x^2}\right) = 0$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x^2}\right) = 0$

donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0}$$

---

b) on a : si $x \neq 0$, $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 3$

donc $\quad 2 \geqslant \frac{1}{f(x)} \geqslant \frac{1}{3}$ $\quad$ on a pris l'inverse car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0;+\infty[$

f(x) est dans cet intervalle

ainsi, si $x > 0$, $3x+2 > 0$ et donc en multipliant par $3x+2$ l'inégalité précédente :

$$2(3x+2) \geqslant \frac{3x+2}{f(x)} \geqslant \frac{3x+2}{3}$$

2,5 pts

ainsi, pour $x > 0$ : $\boxed{\frac{3x+2}{f(x)} \geqslant \frac{3x+2}{3}}$

or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3x+2}{3}\right) = +\infty$, donc d'après un théorème de comparaison : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3x+2}{f(x)}\right) = +\infty}$