



Top Chrono !

Résoudre chacun des exercices suivants en 10 minutes maximum.

122 Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_1^2 \frac{x^2 + 3}{x} dx, \quad J = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 e^{4x} dx.$$

123 Soit F la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$F(x) = x \ln x.$$

1. Calculer la dérivée de la fonction F .

2. En déduire le calcul de $\int_1^2 (\ln x + 1) dx$.

124 Déterminer la valeur moyenne sur $[-1; 1]$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4$.
Donner une illustration graphique.

125 Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^3 + x}.$$

1. Montrer que $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1}$.

2. Calculer $I = \int_1^e f(t) dt$.

126 1. Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = e^{2x}$.

2. Calculer l'aire, en unités d'aire, de la surface comprise entre les courbes représentatives de ces deux fonctions et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

Exercices Top Chrono de la page 184

m°122

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{x^2+3}{x} dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{x} + \frac{3}{x} \right) dx = \int_1^2 \left(x + 3 \cdot \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 3 \ln(x) \right]_1^2 = \left(\frac{4}{2} + 3 \ln(2) \right) - \left(\frac{1}{2} + 0 \right) \\ &= \frac{3}{2} + 3 \ln 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{3}{2} + 3 \ln(2)}$$

$$J = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-1 \right) = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2}}$$

$$K = \int_0^1 e^{4x} dx = \left[\frac{e^{4x}}{4} \right]_0^1 = \frac{e^4}{4} - \frac{e^0}{4} = \frac{e^4 - 1}{4}$$

$$\boxed{K = \frac{e^4 - 1}{4}}$$

m°123

10) $F(x) = x \ln(x) = u \cdot v$ avec $\begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v = \ln(x) & v' = \frac{1}{x} \end{cases}$

donc $F'(x) = u'v + uv' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}$

$$\boxed{F'(x) = \ln(x) + 1}$$

2°) D'après la question 1°) $F'(x) = \ln(x) + 1$
 Donc une primitive de $\ln(x) + 1$ est $F(x) = x \ln(x)$
 D'où le calcul :

$$\int_1^2 (\ln(x) + 1) dx = \left[x \ln(x) \right]_1^2 = 2 \ln(2) - 0 = 2 \ln(2)$$

m° 124

la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a, b]$ est donnée par la formule :

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

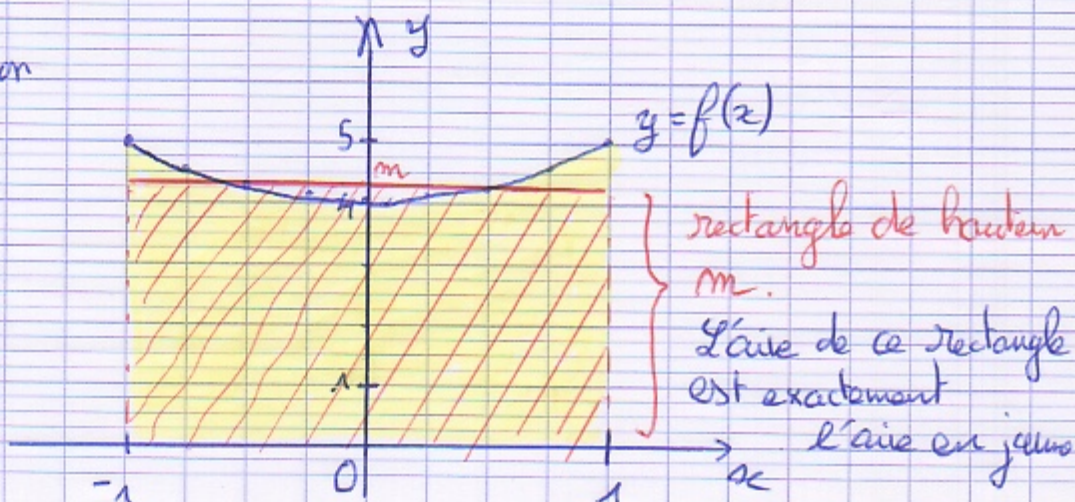
Ici

$$m = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x^2 + 4) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^1$$

$$m = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 4 \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + 8 \right) = \frac{1}{3} + 4$$

$$\boxed{m = \frac{13}{3}} \approx 4,33$$

Illustration



n°125 1°) On a $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3+x}$

$$\text{or: } \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = \frac{1(x^2+1)}{x(x^2+1)} + \frac{x^2}{x(x^2+1)} = \frac{x^2+1+x^2}{x^3+x} \\ = \frac{2x^2+1}{x^3+x} = f(x)$$

Donc $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$

$$2^\circ) \quad \underline{I} = \int_1^e f(t) dt = \int_1^e \left(\frac{1}{t} + \frac{t}{t^2+1} \right) dt$$

$$\underline{I} = \int_1^e \left[\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \left(\frac{2t}{t^2+1} \right) \right] dt$$

je reconnais $\frac{u'}{u}$ avec $u = t^2+1$

une primitive est donc $\ln(u)$

$$\underline{I} = \left[\ln(t) + \frac{1}{2} \ln(t^2+1) \right]_1^e$$

$$\underline{I} = \ln(e) + \frac{1}{2} \ln(e^2+1) - \left(\ln(1) + \frac{1}{2} \ln(2) \right)$$

$$\underline{I} = 1 + \frac{1}{2} \ln(e^2+1) - 0 - \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$\boxed{\underline{I} = 1 + \frac{1}{2} \ln(e^2+1) - \frac{1}{2} \ln 2}$$

n°126

1°) La position relative des deux courbes est donnée par le signe de $f(x) - g(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= e^x - e^{2x} \\ &= e^x - (e^x)^2 \\ &= e^x(1 - e^x) \end{aligned}$$

Pour étudier le signe il faut factoriser

signe de $1 - e^x$

$$1 - e^x > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 > e^x$$

$$\Leftrightarrow \ln(1) > x$$

$$\Leftrightarrow 0 > x$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

$$1 - e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 = e^x$$

$$\Leftrightarrow 0 = x$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

D'où le tableau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
e^x		+	+
$(1 - e^x)$	+	0	-
$f(x) - g(x) = e^x(1 - e^x)$	+	0	-
position relative des deux courbes	Ici $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ car $f(x) - g(x) > 0$		Ici $\mathcal{C}_g$ est en-dessous de $\mathcal{C}_f$ car $f(x) - g(x) < 0$

2°) Sur $[0; 1]$, $\mathcal{C}_g$ est en-dessous de $\mathcal{C}_f$, donc l'aire est donnée par:

$$A = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^1 (e^{2x} - e^x) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - e^x \right]_0^1$$

$$A = \left(\frac{e^2}{2} - e \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \left[\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} \right] \approx 1,476 \text{ u.a.r.}$$