

n° 96 page 28

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$$

$$u_1 = 0^2 + 1 = 1$$

$$u_2 = 1^2 + 1 = 2$$

$$u_3 = 2^2 + 1 = 5$$

$$u_4 = 5^2 + 1 = 26$$

On va démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 2^n$

• pour $n=4$: $u_4 = 26 \geq 2^4 = 16$

La propriété est vraie pour $n=4$

• Hypothèse de récurrence: pour n fixé, $u_n \geq 2^n$
on va montrer qu'alors $u_{n+1} \geq 2^{n+1}$

D'après l'hypothèse de récurrence:

$$u_n \geq 2^n$$

$$\text{donc } u_n^2 \geq (2^n)^2$$

$$\text{donc } u_n^2 + 1 \geq 2^{2n} + 1$$

$$\text{c.à.d. } u_{n+1} \geq 2^{2n} + 1 \geq 2^{2n} \quad (I_1) \quad (\text{car } 1 > 0)$$

car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0; +\infty[$

or nous avons $(2n \geq n+1) \Leftrightarrow (n \geq 1) \leftarrow \text{ce qui est le cas car } n \geq 4$

$$\text{donc } 2^{2n} \geq 2^{n+1} \quad (I_2)$$

reprenons les inégalités: $u_{n+1} \geq 2^{2n} \geq 2^{n+1}$

↑
voir (I₁)

↑
voir (I₂)

La propriété est donc héréditaire.

• conclusion: La propriété est vraie pour $n=4$ et elle est héréditaire, on a donc:

$$\boxed{\text{pour tout } n \geq 4, \quad u_n \geq 2^n}$$

m° 97 page 28 :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -2u_n + 3 \end{cases}$$

On pose $v_n = u_n - 1$ (donc $u_n = v_n + 1$)

Montrons que (v_n) est géométrique :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 && \text{(par définition de } (v_n) \text{)} \\ &= -2u_n + 3 - 1 && \text{(par définition de } (u_n) \text{)} \\ &= -2(v_n + 1) + 3 - 1 && \text{(car } u_n = v_n + 1 \text{)} \\ &= -2v_n - 2 + 2 \\ &= -2v_n \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} = -2v_n$: (v_n) est géométrique de raison -2

On peut alors dire que : $v_n = v_0 \cdot q^n = 4 \cdot (-2)^n$

$$\text{Or } u_n = v_n + 1 = 4(-2)^n + 1$$

$$\boxed{u_n = 4 \cdot (-2)^n + 1}$$

La suite $(-2)^n$ diverge car $-2 \leq -1$
donc la suite (u_n) diverge aussi

n°98 page 28

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6} \end{cases}$$

* Montrons par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 3$ pour tout n

• pour $n=0$: $0 \leq u_0 = 0 \leq 3$

La propriété est vraie pour $n=0$

• hypothèse de récurrence : pour n fixé $0 \leq u_n \leq 3$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$0 \leq u_n \leq 3$$

$$\text{donc } 0+6 \leq u_n+6 \leq 3+6$$

$$\text{donc } \sqrt{6} \leq \sqrt{u_n+6} \leq \sqrt{9}$$

$$\text{ainsi } 0 \leq \sqrt{6} \leq u_{n+1} \leq 3$$

$$\text{c.à.d. } 0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

La propriété est donc héréditaire.

••• Conclusion : La propriété est vraie pour $n=0$ et elle est héréditaire, on peut donc affirmer :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3}$$

car $x \mapsto \sqrt{x}$
est croissante sur $[0, +\infty[$

* Étudions la monotonie de la suite (cela signifie voir si elle est croissante ou si elle est décroissante)

Remarque : trouver le signe de $u_{n+1} - u_n$ me semble pas évident, je calcule alors $u_1 = \sqrt{6}$, donc $u_1 \geq u_0$. Il semble donc que si la suite est monotone elle sera croissante et je vais démontrer par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n .

montrons par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* pour $n=0$ c'est vrai car $u_1 = \sqrt{6} \geq u_0 = 0$

* hypothèse de récurrence : pour n fixé, $u_{n+1} \geq u_n$

D'après l'hyp. de réc. :

$$u_{n+1} \geq u_n$$

$$\text{donc } u_{n+1} + 6 \geq u_n + 6$$

$$\text{donc } \sqrt{u_{n+1} + 6} \geq \sqrt{u_n + 6}$$

cà d: $u_{n+2} > u_{n+1}$
 On vient de démontrer que la propriété est
 héréditaire

* Conclusion: La propriété est vraie pour $n=0$ et
 elle est héréditaire donc:

pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n$

Cela signifie que la suite (u_n)
 est une suite croissante.

Conclusion quant à la convergence de (u_n)

(u_n) est croissante

$u_n \leq 3$ (voir début) donc (u_n) est majorée par 3
 Or toute suite croissante majorée converge, je peux
 donc dire que (u_n) converge