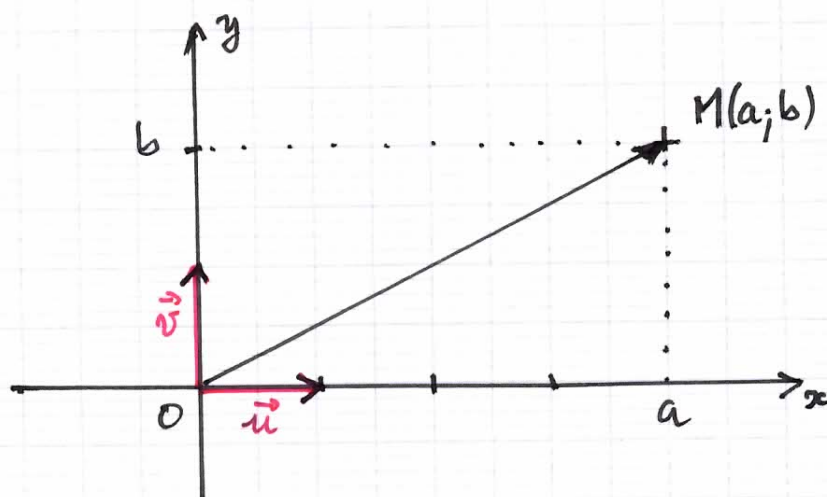


Chapitre 13: Nombres complexes: Forme trigonométrique et forme exponentielle.

1/12

1° Représentation géométrique des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.



a) Définition de l'affixe d'un point, d'un vecteur

Le nombre complexe $z = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}$) sera représenté par le point M de coordonnées $(a; b)$.

On dit que $z = a + ib$ est l'affixe du point M.

On note $M(a + ib)$ et on lit: "M d'affixe $a + ib$ "

Les coordonnées du vecteur $\vec{OM}$ sont: $\vec{OM}(a; b)$

On dit que $z = a + ib$ est l'affixe du vecteur $\vec{OM}$.

On note $\vec{OM}(a + ib)$ et on lit: " $\vec{OM}$ d'affixe $a + ib$ "

On note aussi: $z = \text{aff}(M)$ et $z = \text{aff}(\vec{OM})$

Remarque: L'affixe de M est aussi noté z_M et l'affixe du vecteur $\vec{OM}$ est aussi noté $z_{\vec{OM}}$

propriétés :

• Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$$\text{aff}(\vec{u} + \vec{v}) = \text{aff}(\vec{u}) + \text{aff}(\vec{v})$$

si $k \in \mathbb{R}$, $\text{aff}(k\vec{u}) = k\text{aff}(\vec{u})$

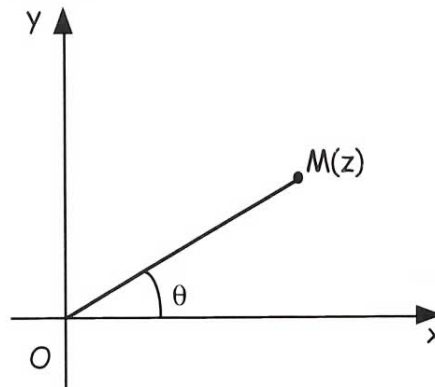
• $\text{aff}(\vec{AB}) = z_B - z_A$

• Si I est le milieu de $[AB]$ alors $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

voir exercices n° 90 à 99 pages 214-215
(aussi n° 12 à 15 page 210)

b) Définition du module et d'un argument d'un complexe

Soit $z = a + ib$ ($a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$) un nombre complexe et M le point du plan complexe qui représente z .



Définition du module de z .

Le module de z , noté $|z|$, est défini par:

$$|z| = \rho = OM \text{ où } M \text{ est le point d'afixe } z$$

Définition d'un argument de z .

Si $z \neq 0$, on définit un argument de z , noté $\arg(z)$, par:

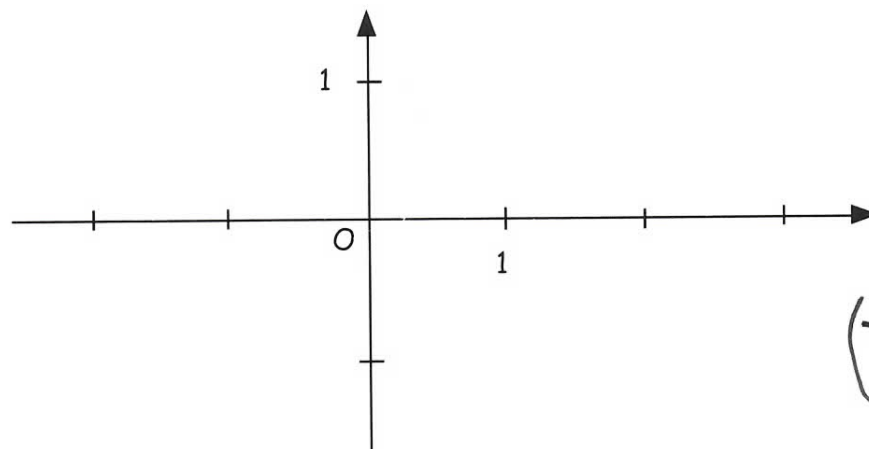
$$\arg(z) = \theta = \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM} \right) \text{ modulo } (2\pi)$$

C'est un angle orienté de vecteur, il est défini modulo 2π .

Le module n'est pas défini pour le nombre 0.

Exercice: Dans chaque cas, représenter le nombre complexe dans le plan complexe et donner le module et un argument de ce nombre.

Nombre complexe z	Module de z	Un argument de z
$z_A = 3$		
$z_B = -2$		
$z_C = i$		
$z_D = 1 + i$		
$z_E = -1 + i$		



(→ ex 16, ex 22, 23, 24
p. 210-211)

c) Formule pour calculer le module

$$\text{Soit } z = a + ib \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$$

$$\text{alors } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Démonstration: Soit M le point d'affixe $z = a + ib$

$$|z| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par déf.}}}{=} OM = \|\vec{OM}\|$$

$$z \in M\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) \text{ donc } \overrightarrow{OM}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{d'où } |z| = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

conséquence :

$$\begin{aligned} \text{si } z &= a + ib \\ \text{alors } z \bar{z} &= a^2 + b^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + ib)(a - ib) \\ &= a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 \\ &= |z|^2 \quad (\text{car } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}) \end{aligned}$$

Formules utiles concernant le module :

z, z_1 et z_2 sont des nombres complexes.

$$* |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$* \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (\text{avec } z_2 \neq 0)$$

$$* \forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0$$

$$* |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$* \text{Si } z \in \mathbb{R} \text{ alors } |z| \text{ est la valeur absolue de } z$$

exemples d'utilisation : ($|i| = 1$) à savoir

$$* |3i| = |3| \cdot |i| = 3 \times 1 = 3$$

$$* |-5(1+i)| = |-5| \times |1+i| = 5 \times \sqrt{1^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$$

$$* |-7i| = 7$$

$$* \left| \frac{-1+i}{2+i} \right| = \frac{|-1+i|}{|2+i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

Exercice: Calculer les modules des nombres complexes suivants.

$$z_1 = 1+2i \quad ; \quad z_2 = 7-i \quad ; \quad z_3 = -2+3i \quad ; \quad z_4 = -2i$$

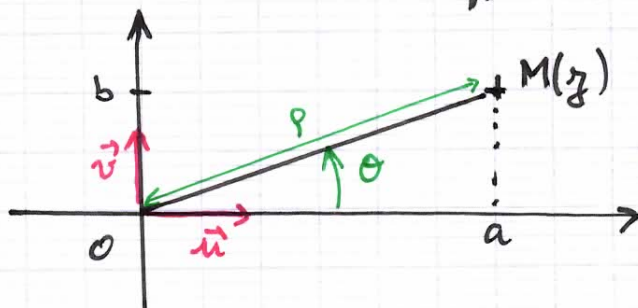
(→ ex 100 p. 215)
(ex 17, 18, 19 p. 211)

d) Méthode pour déterminer un argument

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Donc $z = a+ib$ ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$)

Notons $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$ (2π)

On note M le point d'affixe z .



on a: $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

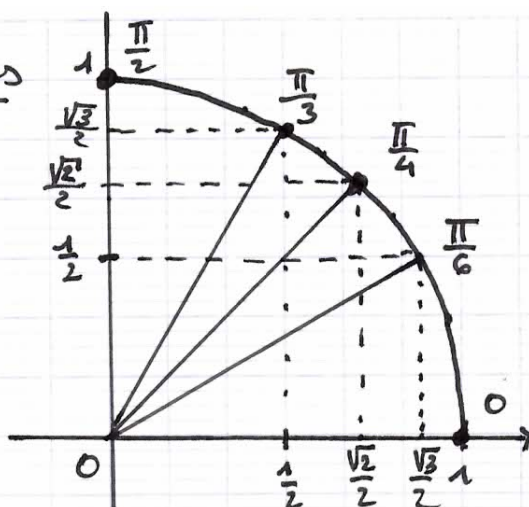
et on a:
$$\begin{cases} a = \rho \cos \theta \\ b = \rho \sin \theta \end{cases}$$

donc

$$\boxed{\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a}{\rho} \quad \leftarrow \text{partie réelle de } z \\ \sin \theta &= \frac{b}{\rho} \quad \leftarrow \text{partie imaginaire de } z \end{aligned}}$$

Lorsqu'on connaît le cosinus et le sinus d'un angle alors on connaît l'angle θ (modulo 2π)

Valeurs remarquables



Exercice: Donner le module et un argument de :

$$z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$$

$$z_2 = -2 - 2i$$

$$z_3 = 5 + 3i$$

2° Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$)
Notons $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$ ($z \neq 0$)

On sait que
$$\begin{cases} a = \rho \cos(\theta) \\ b = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Donc $z = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec $\rho = |z| > 0$ et $\theta = \arg(z)$

conclusion: Tout nombre complexe non nul s'écrit
sous forme trigonométrique :

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

où $\rho = |z| > 0$ et $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$

Exemple : compléter le tableau suivant.

Forme algébrique	Forme trigonométrique
$z_1 = i$	
$z_2 = 1+i$	
$z_3 = 2$	
$z_4 = -3$	
$z_5 = -7$	
$z_6 = 1+i\sqrt{3}$	

Exemple 2 : Donner la forme trigonométrique de :

$$z_1 = \cos \theta - i \sin \theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

et $z_2 = -2(\cos \theta - i \sin \theta) \quad (\theta \in \mathbb{R})$

Réponses : $z_1 = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$

$$z_2 = 2(\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta))$$

Ex 114 à 119
page 216

REMARQUE : Il faut savoir passer d'une forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement.

Exemple 3 : mettre sous forme algébrique

$$z_7 = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right)$$

(rép : $z_7 = -1 + i$)

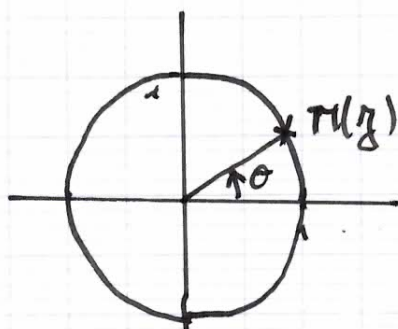
$$z_8 = 2 \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$z_8 = -1 - i\sqrt{3}$

3°) Notation exponentielle.

a) Définition

Soit z un nombre complexe de module 1



notons $\theta = \arg(z) \quad (2\pi)$

Sous forme trigonométrique: $z = 1(\cos\theta + i\sin\theta)$
 $z = \cos\theta + i\sin\theta$

Définition:

On note $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$



ceci est une notation.

On lit: "e puissance $i\theta$ " ou "exponentielle $i\theta$ "

conséquences immédiates: $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta \quad (2\pi)$

Explication par la notation

Si $f(x) = e^{ax}$ (fonction réelle)

alors $f(0) = 1$ et $f'(x) = ae^{ax} = a f(x)$

on montre que si une fonction réelle est dérivable sur $\mathbb{R}$
 et qu'elle vérifie: $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(x) = a f(x) \end{cases}$ alors $f(x) = e^{ax}$

par analogie: si on pose $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

alors $f(0) = 1$

et $f'(\theta) = -\sin\theta + i\cos\theta = i^2\sin\theta + i\cos\theta$
 $= i(\cos\theta + i\sin\theta) = i f(\theta)$

c'est pour cela que l'on note $f(\theta) = e^{i\theta}$

conséquence de la définition:

Soit z un nombre complexe non nul.
Notons $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z) \quad (2\pi)$

La forme trigonométrique de z est:
 $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$

En utilisant la notation exponentielle.

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta}} \quad \text{où } \rho = |z|$$

$$\theta = \arg(z) \quad (2\pi)$$

Ceci est la forme exponentielle de z

Remarques:

- Si $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$
alors $|z| = \rho$ et $\arg(z) = \theta \quad (2\pi)$

- Par contre, si $z = -2e^{i\pi}$ (c'est un complexe)
 $|z| \neq -2$
 $\arg(z) \neq \pi$

- Si $z = 7e^{i\frac{\pi}{3}}$
alors $|z| = 7$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

b) Propriétés

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $\theta' \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{\begin{aligned} (1) \quad e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} &= e^{i(\theta+\theta')} \\ (2) \quad e^{-i\theta} &= \frac{1}{e^{i\theta}} \\ (3) \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} &= e^{i(\theta-\theta')} \end{aligned}}$$

$$(4) (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$$

On calcule avec les formes exponentielle comme avec les puissances!

Démonstration:

Remarques: • On peut retrouver les formules d'addition en écrivant:

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'}$$

et en identifiant les parties réelles et imaginaires.

• On retrouve les formules de duplication en écrivant:

$$e^{i2\theta} = (e^{i\theta})^2$$

et en identifiant les parties réelles et imaginaires.

c) Formules concernant les arguments

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors:

$$(1) \arg(z \cdot z') = \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)$$

$$(2) \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad (2\pi)$$

$$(3) \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad (2\pi)$$

$$(4) \arg(z^n) = n \arg(z) \quad (2\pi)$$

$$(5) \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad (2\pi)$$

démonstration: on utilise les formes exponentielles.

Autres propriétés

$$\begin{aligned}
 * z \text{ est réel} &\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } \arg(z)=0 \ (2\pi) \text{ ou } \arg(z)=\pi \ (2\pi) \\
 &\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } \arg(z)=0 \ (\pi) \\
 &\Leftrightarrow z=0 \text{ ou } \arg(z)=k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

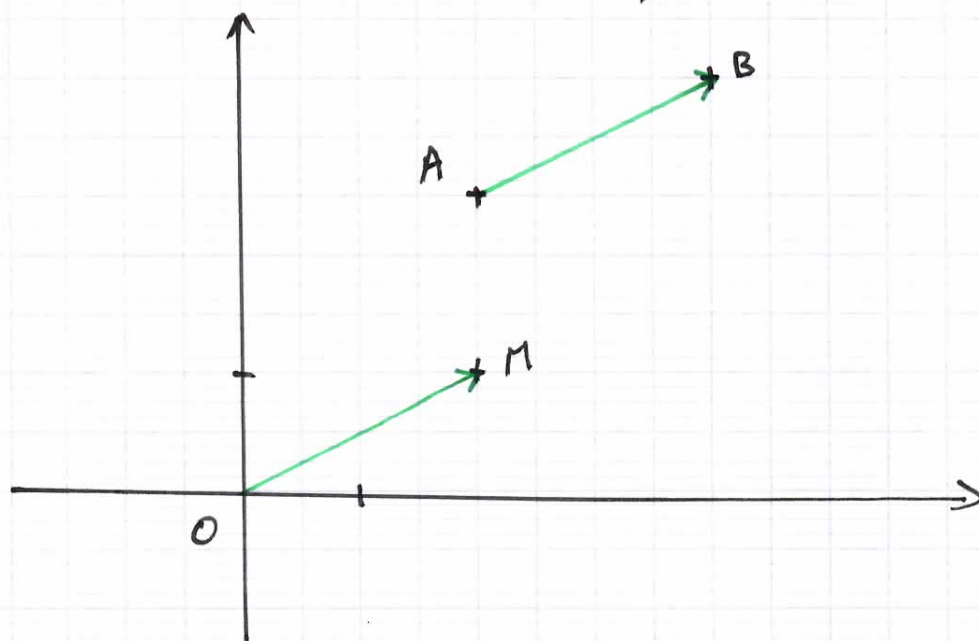
$$\begin{aligned}
 * \text{ On suppose } z \neq 0 \\
 (z \text{ est imaginaire pur}) &\Leftrightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{2} \ (2\pi) \text{ ou } \arg(z)=-\frac{\pi}{2} \ (2\pi) \\
 &\Leftrightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{2} \ (\pi)
 \end{aligned}$$

exercices 138 à 148
page 217

4°) Interprétation géométrique

a) Interprétation géométrique de $|z_B - z_A|$ et $\arg(z_B - z_A)$

Soient A et B deux points d'affixe z_A et z_B .



définissons le point M tel que $\boxed{\vec{OM} = \vec{AB}}$
 Nous avons donc $\text{aff}(\vec{OM}) = \text{aff}(\vec{AB})$
 c.à.d $\boxed{z = z_B - z_A}$

Comme z est l'affixe de M , on sait que :

$$\left. \begin{aligned} |z| &= OM = AB \\ \arg(z) &= (\vec{u}, \vec{OM}) = (\vec{u}, \vec{AB}) \quad (2\pi) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{car} \\ \vec{OM} = \vec{AB} \end{array}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{\begin{aligned} |z_B - z_A| &= AB \\ \arg(z_B - z_A) &= (\vec{u}, \vec{AB}) \quad (2\pi) \end{aligned}}$$

Ce qu'on peut retenir :

- Le module d'un complexe s'interprète géométriquement par une longueur.
- Un argument d'un complexe s'interprète géométriquement par un angle.

b) Conséquence : interprétation géométrique de $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

Théorème : Si A, B, C et D sont 4 points d'affixes z_A, z_B, z_C et z_D alors :

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = (\vec{AB}, \vec{CD}) \quad (2\pi)$$

démonstration : On part de $(\vec{AB}, \vec{CD}) = (\vec{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{CD})$
 → exercices pages 217-218 (n°149 à 160)