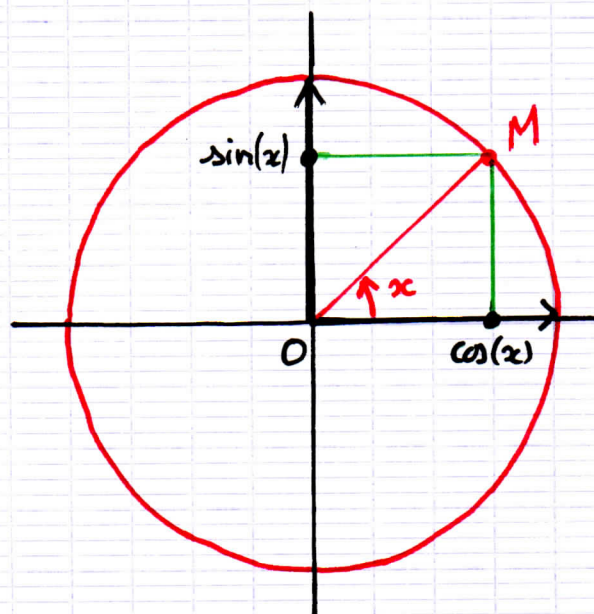


①

Rappels

a) Définition

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$.
Soit x un réel et M le point associé sur le cercle trigonométrique.
(c'est à dire : $(\vec{x}, \vec{OM}) = x$).



- Le cosinus de x , noté $\cos(x)$ est l'abscisse de M .
- Le sinus de x , noté $\sin(x)$ est l'ordonnée de M .

conséquences : • Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

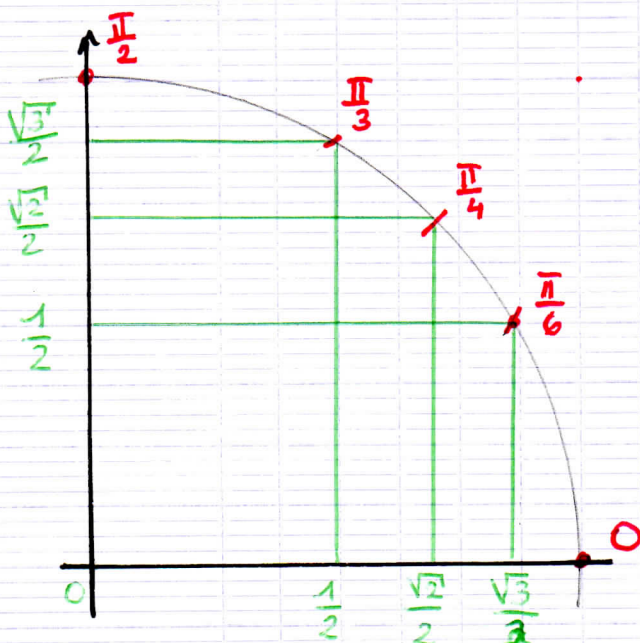
$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

• Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

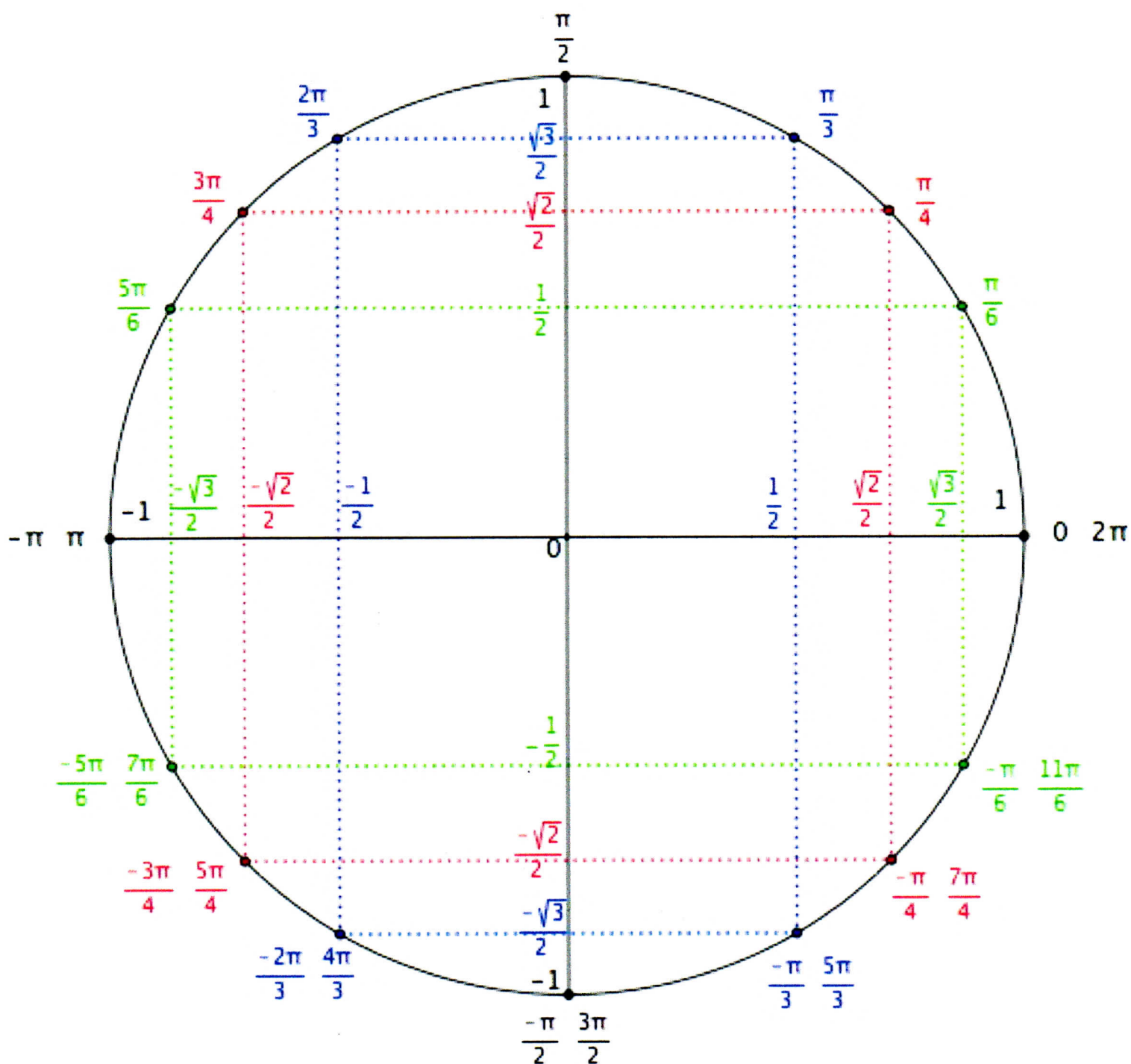
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

b) Valeurs remarquables



Angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Le cercle en entier est sur la page suivante.

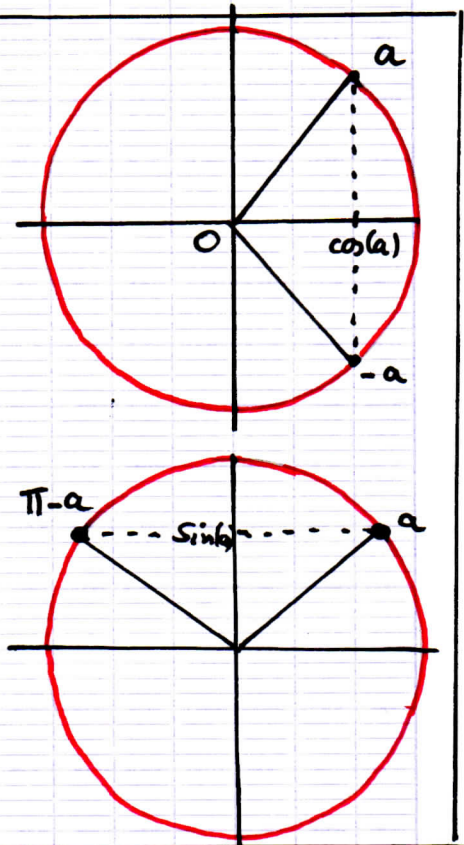


c) Résolution d'équations

Théorème: Equations trigonométriques

$$\cos(x) = \cos(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + k \cdot 2\pi \end{cases} \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin(x) = \sin(a) \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + k \cdot 2\pi \end{cases} \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z})$$



Exemples: Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes:

a) $\sqrt{2} \cos(x) - 1 = 0$

b) $2 \sin(x) - \sqrt{3} = 0$

d) Résolution d'inéquations

Pour résoudre une inéquation du type $a \cos(x) + b \leq 0$ ou $a \sin(x) + b \leq 0$ le principe reste le même :

- on isole $\cos(x)$ ou $\sin(x)$
- on lit les solutions sur le cercle trigonométrique

Exemples : ① Résoudre : $\sin(x) \geq \frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$

② Résoudre l'inéquation : $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$ sur $[0; 2\pi]$

e) Remarque : Les formules : $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

sont souvent utiles pour changer un sinus en cosinus et inversement.

exemple :

- Résoudre l'équation : $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$
- Donner les solutions de cette équation de l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

②

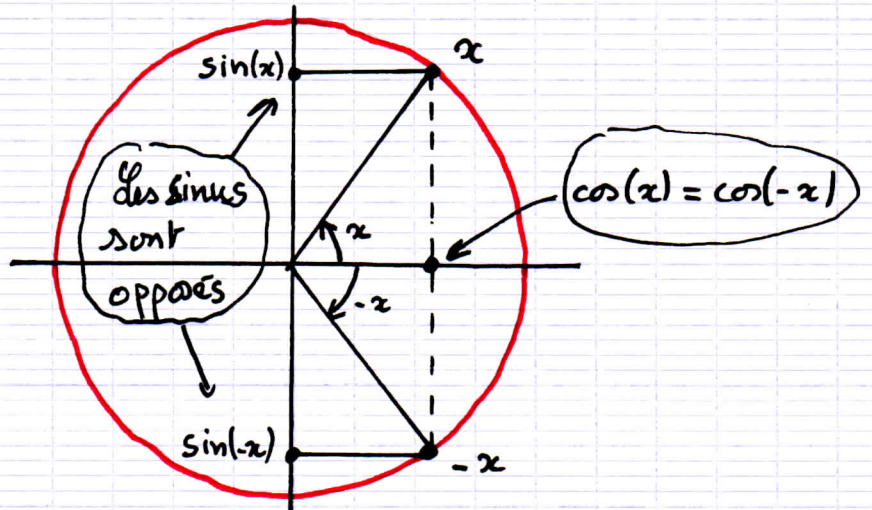
Propriétés et représentation graphique

a) Parité

propriétés

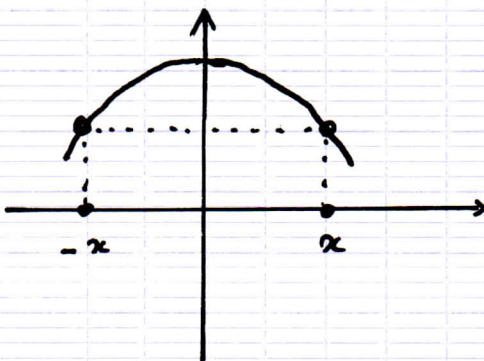
- Pour tout réel x : $\cos(-x) = \cos(x)$
On dit que la fonction cosinus est paire
- Pour tout réel x : $\sin(-x) = -\sin(x)$
On dit que la fonction sinus est impaire.

démonstration : On utilise le cercle trigonométrique.



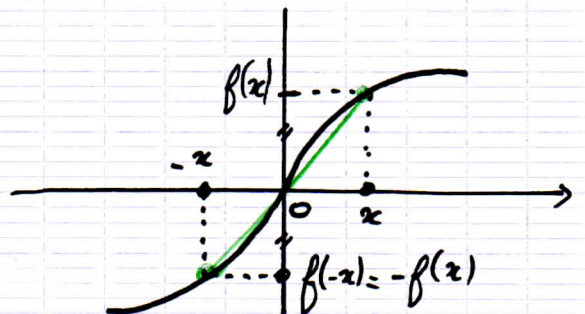
conséquence graphique :

fonction paire : $f(-x) = f(x)$



Comme $f(x) = f(-x)$ pour tout x , la représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe (Oy).

fonction impaire : $f(-x) = -f(x)$



Comme $f(-x) = -f(x)$ pour tout x , la représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

conclusion: • La courbe représentative de $x \mapsto \cos(x)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car cosinus est une fonction paire.
 • La courbe représentative de $x \mapsto \sin(x)$ est symétrique par rapport à l'origine du repère car la fonction sinus est impaire.

b) Périodicité

propriété: Pour tout réel x , $\begin{cases} \cos(x+2\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2\pi) = \sin(x) \end{cases}$
 On dit que les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π (ou 2π -périodiques)

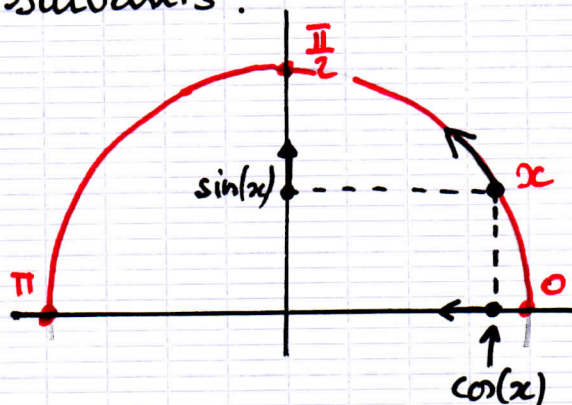
conséquence graphique: Les deux courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sont invariantes par translation de vecteurs $2\pi\vec{i}$ ou $k(2\pi\vec{i})$ où $k \in \mathbb{Z}$.
 Il suffit donc de connaître la représentation graphique de ces deux fonctions sur un intervalle de longueur 2π : par translations successives on obtient toute la courbe.

c) En combinant parité et périodicité

Les deux propriétés (a) Parité et (b) Périodicité nous permettent de réduire l'intervalle d'étude des fonctions cosinus et sinus à $[0; \pi]$. En effet, par parité, on obtient les courbes sur $[-\pi; 0]$, puis lorsque ces fonctions sont connues sur $[-\pi; \pi]$, on utilise la périodicité pour obtenir toute la courbe.

d) Tableaux des variations sur $[0; \pi]$

En observant sur le cercle trigonométrique les variations de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en faisant varier x sur l'intervalle $[0; \pi]$ on obtient les deux tableaux suivants :



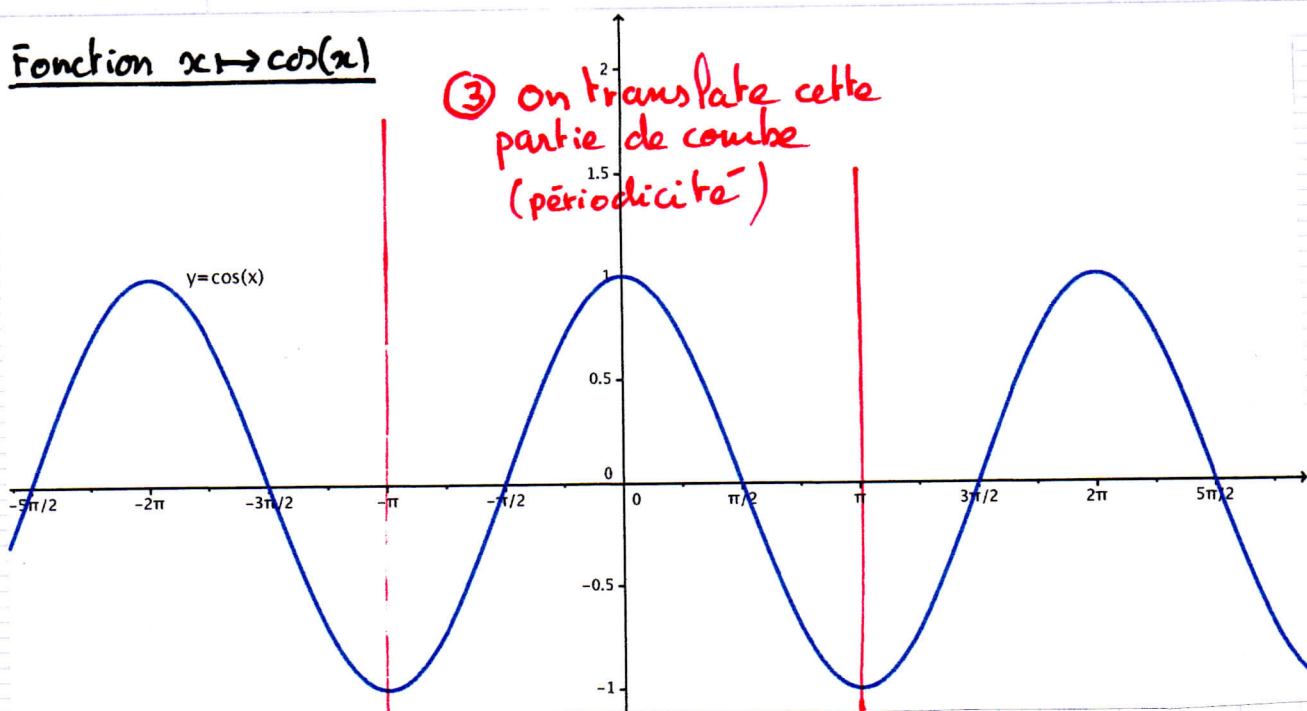
x	0	π
$\cos(x)$	1	-1

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	1	0

e) Représentations graphiques

En utilisant les variations sur $[0; \pi]$, puis la parité et ensuite la périodicité, on obtient les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$.

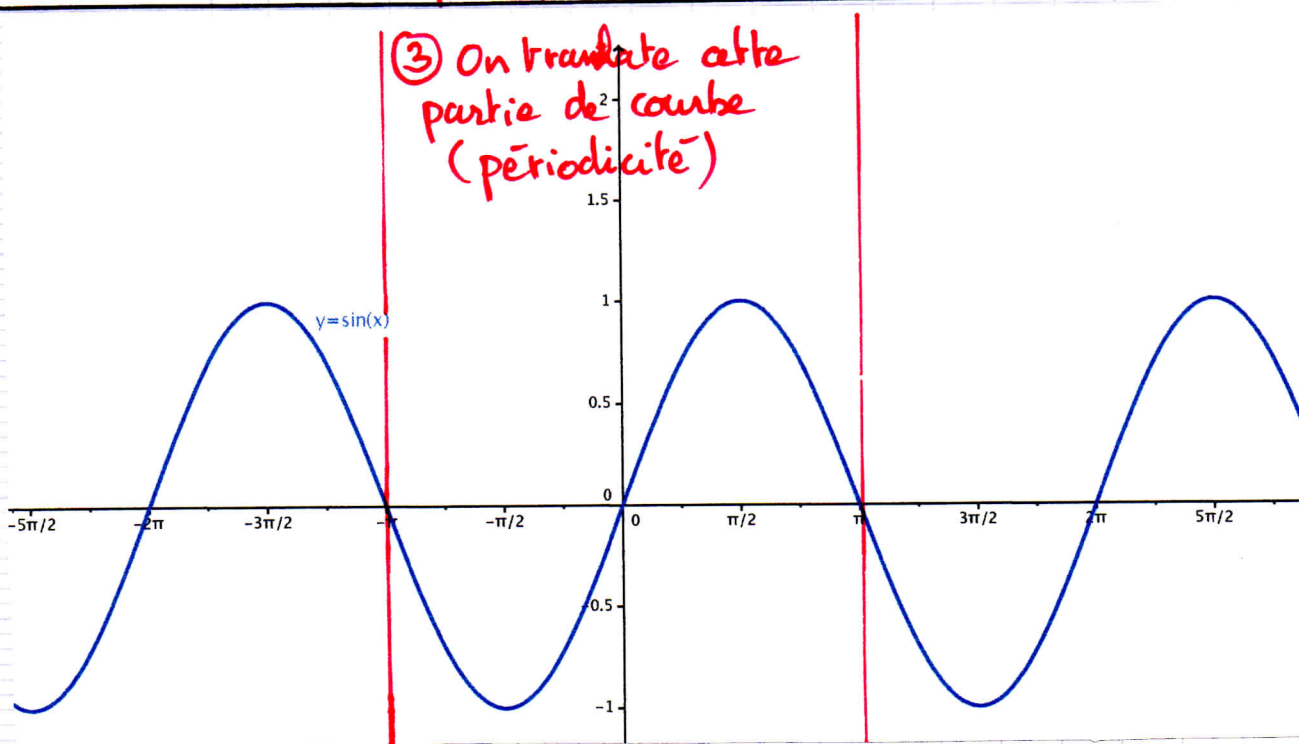
Fonction $x \mapsto \cos(x)$



② On fait la symétrie d'axe (Oy) (car la fonction est paire)

① On trace sur $[0; \pi]$

③ On translate cette partie de courbe (périodicité)



② On fait la symétrie de centre O (car la fonction est impaire)

① On trace sur $[0; \pi]$

③ Dérivabilité

Propriété : Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

conséquence : Si $u(x)$ est une fonction dérivable sur I alors les fonctions $x \mapsto \cos(u(x))$ et $x \mapsto \sin(u(x))$ sont dérivables sur I et on a :

$$(\sin(u(x)))' = u'(x) \cdot \cos(u(x))$$

$$(\cos(u(x)))' = -u'(x) \cdot \sin(u(x))$$

exercice : Calculer les dérivées des fonctions :

① $f(x) = \sin(3x)$

② $f(x) = \cos(5x + \frac{\pi}{4}) + \sin(x)$

③ $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

④ $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

4 - Une limite à connaître

Théorème :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = 1$$

démonstration :

exercice : Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x} \right)$