Chapitre 3 : Limites de fonctions

1°) Une notion délicate à définir.

a) Limites infinies.

Définition 1	limite infinie d'une fonction à l'infinie
	Soit f une fonction. 1. On dit que f(x) a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si et seulement si : pour tout intervalle $I=]A;+\infty[$ ($A\in\mathbb{R}$), tous les nombres f(x) sont dans l'intervalle I dès que x est assez grand (respectivement -x assez grand). 2. Enoncés analogues pour une limite égale à $-\infty$.

Illustration :

Des résultats à connaître

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n=+\infty$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=-\infty$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec n impair.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n=+\infty$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec n pair.

b) **Limite finie en l'infini**.

Définition 2	limite finie d'une fonction à l'infinie
	Soit ℓ un nombre réel. On dit que la fonction f a pour limite ℓ quand x tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si et seulement si : pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, les nombres f(x) sont tous dans I dès que x est assez grand (respectivement -x assez grand). On note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ (Respectivement : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$)

Illustration :

Remarque importante :

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$, on dit que la droite d'équation $y=\ell$ est asymptote à la courbe représentative de f (en $+\infty$ ou $-\infty$ selon le cas.)

c) limite d'une fonction lorsque la variable tend vers un réel.

Définition 3	limite ℓ en a
	On dit que f tend vers ℓ quand x tend vers a si et seulement si pour tout intervalle ouvert J contenant ℓ, tous les nombres f(x) appartiennent à J dès que x est assez proche de a.

Définition 4	limite infinie en a
	On dit que f tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) lorsque x tend vers a si et seulement si : pour tout intervalle $J=]A;+\infty[$ (respectivement $]-\infty;A[$), tous les nombres f(x) appartiennent à J dès que x est assez proche de a.

Remarque importante :

Lorsque $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ On dit que la droite d'équation x=a est asymptote verticale à la courbe représentative de f .

Illustration :

2°) Opérations sur les limites

Dans tous les tableaux qui suivent, α désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$ et ℓ et ℓ' désignent deux réels.

Les fonctions f et g considérées sont définies au voisinage de α.

Les limites de ces fonctions sont déterminées en α.

Limite d'une somme

si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (f+g)(x) =$						

Limite d'un produit

si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (f\times g)(x) =$									

Limite d'un quotient

si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0
si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0
alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (\frac{f}{g})(x) =$												

Exercice 1 :Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction définie par : $f(x)=x^3\left(\frac{1}{x}-2\right)$.

Exercice 2 : Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3+2x^2-4$.