

m°53

$$a^{\circ}) \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - 2x + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $1 - 0 + +\infty$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad +\infty$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{x}{5} + \frac{5}{x} \right) = +\infty$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad +\infty$

(La droite d'équation
 $x=0$ est asymptote
verticale)

// //

$x=0$ est asymptote.

n°54 on cherche les limite en 1^+ (car fcts def. sur $]1; +\infty[$)

a) tableau de signe

x	1
$1-x$	$+ \quad 0 \quad -$

donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) = 0^-$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{1-x} \right) = -\infty$

* autre méthode

$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1$ donc $0 > 1-x$, $1-x < 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x) = 0^-$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-x)^2 = 0^+$ donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$

n°55

(1) a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

• $\lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$

• $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0^+$ ($x > 2$ donc $x-2 > 0$)

Donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x+1}{x-2} \right) = +\infty$ ("forme $\frac{3}{0^+}$ ")

d) $k(x) = \frac{1-x^2}{2-x} \rightarrow \frac{1-4}{0} = \frac{-3}{0}$

on a $\lim_{x \rightarrow 2} (1-x^2) = 1-4 = -3$ } donc $\lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} (2-x) = 0^-$
 ($x > 2$ donc $2-x < 0$)

n°57 :

① Signe de $x^2 + x - 2$

C'est un polynôme de degré 2, il est donc du signe de $a=1$ sauf entre les racines :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \times (-2) = 9$$

Il y a deux racines réelles.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 3}{2} = -2 \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$$

D'où le tableau de signe :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
x^2+x-2	$+$	0	$-$	0

$x=2$

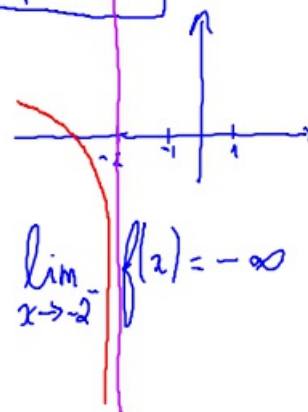
② $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x-2}$

limite en -2^- (limite en -2 à gauche)

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + x - 2) = 0^+ \text{ (voir tableau de signe)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} (x+1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + x - 2) = 0^+ \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$



limite en -2^+ (limite en -2 à droite)

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + x - 2) = 0^- \text{ (voir tableau de signe)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^+} (x+1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + x - 2) = 0^- \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

limite en 1^-

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x+1}{x^2+x-2} \right) = -\infty$$

limite en 1^+

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

Il faudrait
détailler.

n°77

① $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

* on $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$

* de même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$

Remarque

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

② $g(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}}$

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \sqrt{0} = 0$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right) = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \sqrt{0} = 0$

Remarque

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2 + 1}} = \lim_{X \rightarrow 0} \sqrt{X} = 0$$

③

$h(x) = \sqrt{\frac{3x^2 + 7}{x^2 + 1}}$

$$\frac{3x^2 + 7}{x^2 + 1} = \frac{x^2 \left(3 + \frac{7}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{3 + \frac{7}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{7}{x^2} \right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right) = 0$

ainsi: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3 + \frac{7}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = \frac{3}{1} = 3$

donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{3x^2 + 7}{x^2 + 1}} = \sqrt{3}$