Extraits de sujet de BTS (fiche 4)

Année 1997

Exercice 1 (9 points)

Dans un laboratoire, un technicien étudie l'établissement d'un courant d'intensité i dans un circuit de type R , L , C ; i est une fonction à valeurs réelles de la variable réelle t définie comme suit :

$$\begin{cases} \text{si } t < 0 \text{ alors } i(t) = 0 \\ \text{si } t \geq 0 \text{ alors } \dfrac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t) = (t+1)U(t) \\ i(0^+) = 1 \text{ et } i'(0^+) = 0 \end{cases}$$

U est la fonction échelon unité, définie par $U(t) = 0$ si $t < 0$ et $U(t) = 1$ si $t \geq 0$.

1) Déterminer, à l'aide de la variable réelle p, la transformée de Laplace de la fonction

$$t \mapsto (t+1)U(t).$$

2) Exprimer, à l'aide de la variable réelle p et de la transformée de Laplace I de i, la transformée de Laplace de la fonction : $t \mapsto \dfrac{1}{2}i''(t) + i'(t) + i(t)$.

3) En déduire, pour $p > 0$, $I(p)$ en fonction de p.

4) Montrer que, pour $p > 0$, $I(p)$ s'écrit sous la forme : $I(p) = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}$.

5) Déduire de ce qui précède l'expression de $i(t)$ en fonction de t.

6) Le technicien, chargé de cette étude, s'intéresse maintenant aux valeurs approchées de $i(t)$ lorsque t est positif et proche de 0. Il considère, à cet effet, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + (\cos x)e^{-x}$$

Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en $x = 0$. (On pourra utiliser les développements limités de $\cos x$ et e^{-x} à l'ordre 3 en zéro).

On admettra que le technicien peut alors écrire $i(t) = 1 + \dfrac{1}{3}t^3 + t^3\varepsilon(t)$, pour t positif, avec

$\lim\limits_{t \to 0^+} \varepsilon(t) = 0$.

Année 1999

EXERCICE n° 2 : *(13 points)*

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

I - On veut résoudre sur l'intervalle [0 ; + ∞[le système différentiel S suivant, où f et g sont deux fonctions dérivables sur l'intervalle [0 ; + ∞[:

$$\begin{cases} f'(t) + f(t) + g(t) = 0 \\ g'(t) + g(t) - f(t) = 0 \\ f(0) = 1 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

On admet que les fonctions f, g, f' et g' ont des transformées de Laplace.

1-On note $F(p)$ et $G(p)$ les transformées de Laplace de f et de g.

Montrer que $F(p) = \dfrac{p+1}{(p+1)^2+1}$ et que $G(p) = \dfrac{1}{(p+1)^2+1}$.

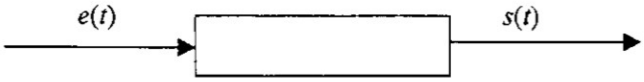
2-En déduire les fonctions f et g.

Année 2002

Exercice 1. (*12 points*)

La fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t \geq 0$.

On considère le système « entrée – sortie » représenté ci-dessous :



On note s le signal de sortie associé au signal d'entrée e. Les fonctions s et e sont des fonctions causales, c'est-à-dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$. On admet que les fonctions s et e admettent des transformées de Laplace, notées respectivement S et E.
La fonction de transfert H du système est définie par : $S(p) = H(p) \times E(p)$.
On considère le signal d'entrée e défini par :

$$e(t) = t\,\mathcal{U}(t) - 2\,\mathcal{U}(t-1) - (t-2)\,\mathcal{U}(t-2)$$

et la fonction H définie sur $]0, +\infty[$ par $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

1°) Tracer la courbe représentative de la fonction e dans un repère orthonormal.

2°) Pour $p > 0$, déterminer $E(p)$.

3°) Déterminer les nombres réels A, B, et C tels que, pour tout $p > 0$, on ait :

$$\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1}.$$

On admet que

$$\frac{2}{p(p+1)} = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+1}.$$

4°)
4.1. Déterminer $S(p)$ puis $s(t)$.
4.2. En déduire que la fonction s est définie par :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = t - 1 + \mathrm{e}^{-t} & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ s(t) = t - 3 + \mathrm{e}^{-t}(1 + 2\mathrm{e}) & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ s(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(1 + 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^2\right) & \text{si } t \geq 2 \end{cases}$$