Fiche n°5

BTS Electrotechnique Session juin 2008

Exercice 1. (11 *points*)

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U, est définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est dite causale si elle est nulle sur l'intervalle $]-\infty;0[$.

1. On considère la fonction causale e définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$e(t) = 4\left[U(t) - U(t-2)\right].$$

   a) Tracer la représentation graphique de la fonction e dans un repère orthormal.

   b) On note E la transformée de Laplace de la fonction e.
   Déterminer $E(p)$.

2. On considère la fonction s telle que :

$$4s'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s(0) = 0.$$

   On admet que la fonction s possède une transformée de Laplace, notée S.
   Démontrer que :

$$S(p) = \frac{1}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)}\left(1 - \mathrm{e}^{-2p}\right).$$

3. Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$\frac{1}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{p + \frac{1}{4}}.$$

4. Compléter le tableau ci-dessous dans lequel f désigne la fonction causale associée à F :

$F(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-2p}$	$\frac{1}{p+\frac{1}{4}}$	$\frac{1}{p+\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$			

5. **a)** Déterminer $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque.

   b) Vérifier que :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ s(t) = 4 - 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 2 \\ s(t) = 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1\right) & \text{si} \quad t \geqslant 2 \end{cases}$$

6. **a)** Justifier que la fonction s est croissante sur l'intervalle $[0;2]$

   b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{t \to 2 \\ t<2}} s(t)$.

7. **a)** Déterminer le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$.

8. Tracer la courbe représentative de la fonction s dans un repère orthonormal.