3°) Limites et ordre

Théorème 2 Limites et ordre

1. *Théorème des « Gendarmes »*

   Si, pour x « assez voisin de a »(a fini ou infini), on a : $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si u et v ont la même limite l en a, alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

2. *Cas d'une limite infinie*

   Si, pour x « assez voisin de a »on a $f(x) \geq u(x)$, et si :

$$\lim_{x \to a} u(x) = +\infty, \textit{ alors } \lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

(Énoncé analogue pour $-\infty$)

Démonstration : Dans le cas où $a = +\infty$

On considère un intervalle ouvert quelconque I contenant l.

La fonction u a pour limite l en $+\infty$ donc il existe un réel A tel que pour $x \in]A; +\infty[$ tous les nombres $u(x)$ sont dans I.
De même, pour la fonction v : On note B le réel tel que pour tout $x \in]B; +\infty[$ on a : $v(x) \in I$.
Le réel C est le plus grand des nombres A et B. Alors pour tout $x \in]C; +\infty[$ on a : $v(x) \in I$ et $u(x) \in I$.
Or, on sait que $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$.